



EDISI REVISI 2018

MATEMATIKA

SMP/MTs

KELAS

IX

Hak Cipta © 2018 pada Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan
Dilindungi Undang-Undang

Disklaimer: Buku ini merupakan buku siswa yang dipersiapkan Pemerintah dalam rangka implementasi Kurikulum 2013. Buku siswa ini disusun dan ditelaah oleh berbagai pihak di bawah koordinasi Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan, dan dipergunakan dalam tahap awal penerapan Kurikulum 2013. Buku ini merupakan “dokumen hidup” yang senantiasa diperbaiki, diperbaharui, dan dimutakhirkan sesuai dengan dinamika kebutuhan dan perubahan zaman. Masukan dari berbagai kalangan yang dialamatkan kepada penulis dan laman <http://buku.kemdikbud.go.id> atau melalui email buku@kemdikbud.go.id diharapkan dapat meningkatkan kualitas buku ini.

Katalog Dalam Terbitan (KDT)

Indonesia. Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan.

Matematika/ Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan.-- . Edisi Revisi Jakarta: Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan, 2018.
vi, 330 hlm. : illus. ; 25 cm.

Untuk SMP/MTs Kelas IX

ISBN 978-602-282-984-3 (jilid lengkap)

ISBN 978-602-282-989-8 (jilid 3)

1. Matematika -- Studi dan Pengajaran

I. Judul

II. Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan

510

Penulis : Subchan, Winarni, Muhammad Syifa'ul Mufid, Kistosil Fahim, dan Wawan Hafid Syaifudin.

Penelaah : Agung Lukito, Turmudi, Sri Wardhani, St. Suwarno, dan Alhadi Bustamam.

Pe-review : Rachimin

Penyelia Penerbitan : Pusat Kurikulum dan Perbukuan, Balitbang, Kemendikbud.

Cetakan Ke-1, 2015 (ISBN: 978-602-282-989-8 (jilid 3))

Cetakan Ke-2, 2018 (Edisi Revisi)

Disusun dengan huruf Times New Roman, 11 pt.

Kata Pengantar

Alhamdulillah, segala puji bagi Allah, Tuhan semesta alam. Berkat kuasa Allah SWT penulis bisa menuntaskan Buku Matematika Kelas IX SMP/MTs Kurikulum 2013 ini. Buku ini disusun berdasarkan Kurikulum 2013 yang diterbitkan oleh Kementerian Pendidikan Dasar dan Menengah Republik Indonesia. Selain itu, buku ini juga ditulis dengan menyesuaikan materi dan kompetensi yang berdasar standar internasional seperti PISA (*Program for International Student Assessment*) dan TIMSS (*The International Mathematics and Science Survey*).

Siswa dalam pembelajaran Kurikulum 2013 tidak diperkenankan lagi meminta guru untuk memberikan semua pengetahuan secara langsung atau dengan metode lama yaitu ceramah. Dalam pembelajaran berdasarkan kurikulum 2013, siswa akan diajak, diarahkan, dan dipandu oleh guru agar siswa secara aktif menggali pengetahuan, menemukan dan mengkonstruksi suatu konsep dengan beraktivitas dan bernalar melalui kegiatan-kegiatan yang disajikan. Pembelajaran matematika diarahkan agar siswa mampu berpikir rasional, kritis dan kreatif, memiliki rasa ingin tahu yang tinggi pada ilmu pengetahuan, mampu berkomunikasi dan bekerjasama, jujur, konsisten, dan tangguh dalam menghadapi masalah. Untuk itu, pembelajaran dilakukan dengan pendekatan pembelajaran ilmiah yang mencakup lima hal, yaitu (1) mengamati suatu objek, fenomena, kejadian, atau informasi lainnya; (2) membuat pertanyaan/menanya; (3) menggali/mengumpulkan informasi/mencoba; (4) menalar/mengasosiasi/menganalisa; dan (5) mengkomunikasikan.

Pembahasan materi dalam buku ini selalu didahului dengan pengetahuan konkret yang dijumpai siswa dalam kehidupan sehari-hari. Permasalahan konkret tersebut dipergunakan sebagai jembatan untuk menuju ke dunia matematika abstrak melalui pemanfaatan simbol-simbol matematika yang sesuai melalui permodelan. Sesampainya pada ranah abstrak, metode-metode matematika diperkenalkan untuk menyelesaikan model permasalahan yang diperoleh dan mengembalikan hasilnya pada ranah konkret. Sesuai dengan pendekatan yang dipergunakan dalam Kurikulum 2013, siswa diharuskan untuk mencari dan mengeksplorasi sumber belajar lain yang tersedia dan terbentang luas di sekitarnya. Peran guru sangat penting untuk meningkatkan dan menyesuaikan daya serap siswa dengan ketersediaan kegiatan pada buku ini. Guru dapat memperkayanya dengan kreasi dalam bentuk kegiatan dan media belajar lain yang sesuai dan relevan yang bersumber dari lingkungan sosial dan alam.

Terkait dengan materi, dalam kurikulum 2013 sejak kelas VII telah diajarkan antara lain tentang data dan peluang; pola dan barisan bilangan, aljabar, dan bangun; serta transformasi geometri. Keseimbangan antara matematika angka dan matematika pola dan bangun selalu dijaga. Kompetensi pengetahuan bukan hanya sampai memahami secara konseptual tetapi sampai ke penerapan melalui pengetahuan prosedural dalam pemecahan masalah matematika termasuk dalam masalah dalam kehidupan nyata. Kompetensi keterampilan berfikir juga diasah untuk dapat memecahkan masalah yang membutuhkan pemikiran order tinggi seperti menalar pemecahan masalah melalui permodelan, pembuktian dan perkiraan/pendekatan.

Implementasi kurikulum 2013 yang telah berjalan selama tiga tahun ini telah mendapat tanggapan yang positif dan masukan yang sangat berharga. Berbagai evaluasi dan revisi juga dilakukan oleh Kementerian Pendidikan Dasar dan Menengah. Hal tersebut dipergunakan semaksimal mungkin, salah satunya dengan menyiapkan buku untuk menyempurnakan implementasi pada tahun ajaran 2016/2017 dan seterusnya. Sebagai edisi revisi pertama, buku ini sangat terbuka dan perlu dilakukan perbaikan untuk penyempurnaan. Oleh karena itu, kami mengundang para pembaca memberikan kritik, saran dan masukan untuk perbaikan dan penyempurnaan pada edisi berikutnya. Kritik, saran, dan masukan dapat disampaikan melalui email. Atas kontribusi tersebut, kami mengucapkan terima kasih. Mudah-mudahan kita dapat memberikan yang terbaik bagi kemajuan dunia pendidikan dalam rangka mempersiapkan Indonesia yang lebih baik.

Selamat belajar putra-putri Indonesia, generasi penerus bangsa tercinta. Kelak di tanganmulah bangsa, negara bahkan dunia ini. Belajarlah dengan sungguh-sungguh, niatkanlah untuk mempersiapkan bekal dunia dan akhiratmu. Semoga Allah SWT senantiasa memberi kekuatan dan memudahkan langkahmu dalam jalan kebaikan.

Jakarta, Januari 2016

Tim Penulis





DAFTAR ISI

Kata Pengantar	iii
Daftar Isi	iv
Bab I Perpangkatan dan Bentuk Akar	1
Tokoh Matematika	3
1.1 Bilangan Berpangkat	4
Latihan 1.1 Bilangan Berpangkat	10
1.2 Perkalian pada Perpangkatan	12
Latihan 1.2 Perkalian pada Perpangkatan	20
1.3 Pembagian pada Perpangkatan	22
Latihan 1.3 Pembagian pada Perpangkatan	30
1.4 Pangkat Nol, Pangkat Negatif, dan Bentuk Akar	32
Latihan 1.4 Pangkat Nol, Pangkat Negatif, dan Bentuk Akar	46
1.5 Notasi Ilmiah (Bentuk Baku)	50
Latihan 1.5 Notasi Ilmiah (Bentuk Baku)	55
Proyek 1	57
Uji Kompetensi 1	58
Bab II Persamaan dan Fungsi Kuadrat	63
Tokoh Matematika	65
2.1 Persamaan Kuadrat	66
Latihan 2.1 Persamaan Kuadrat	81
2.2 Grafik Fungsi Kuadrat	82
Latihan 2.2 Grafik Fungsi Kuadrat	92
2.3 Sumbu Simetri dan Nilai Optimum	93

Latihan 2.3 Sumbu Simetri dan Nilai Optimum	102
2.4 Menentukan Fungsi Kuadrat	103
Latihan 2.4 Menentukan Fungsi Kuadrat	115
2.5 Aplikasi Fungsi Kuadrat.....	116
Latihan 2.5 Aplikasi Fungsi Kuadrat.....	126
Proyek 2.....	128
Uji Kompetensi 2.....	129
Bab III Transformasi.....	133
Tokoh Matematika.....	135
3.1 Pencerminan (Refleksi)	136
Latihan 3.1 Pencerminan (Refleksi).....	149
3.2 Pergeseran (Translasi)	152
Latihan 3.2 Pergeseran (Translasi).....	158
3.3 Rotasi.....	162
Latihan 3.3 Perputaran (Rotasi).....	169
3.4 Dilatasi	172
Latihan 3.4 Dilatasi	179
Proyek 3.....	182
Uji Kompetensi 3.....	191
Bab IV Kekongruenan dan Kesebangunan.....	199
Tokoh Matematika.....	201
4.1 Kekongruenan Bangun Datar	202
Latihan 4.1 Kekongruenan Bangun Datar	212
4.2 Kekongruenan Dua Segitiga.....	216
Latihan 4.2 Kekongruenan Dua Segitiga	226
4.3 Kesebangunan Bangun Datar	228
Latihan 4.3 Kesebangunan Bangun Datar.....	238

4.4 Kesebangunan Dua Segitiga.....	242
Latihan 4.4 Kesebangunan Dua Segitiga	254
Proyek 4.....	259
Uji Kompetensi 4.....	261
Bab V Bangun Ruang Sisi Lengkung	269
Tokoh Matematika.....	271
5.1 Tabung.....	272
Latihan 5.1 Tabung.....	280
5.2 Kerucut.....	283
Latihan 5.2 Kerucut.....	293
5.3 Bola	296
Latihan 5.3 Bola	303
Proyek 5.....	306
Uji Kompetensi 5.....	307
Daftar Pustaka	314
Glosarium	319
Indeks.....	321
Profil Penulis.....	322
Profil Penelaah	327
Profil Editor	329
Profil Ilustrator	330

Belajar memang melelahkan,
namun lebih lelah nanti jikalau saat ini tidak belajar.



Bab I

Perpangkatan dan Bentuk Akar



Kata Kunci

- Bilangan Berpangkat
- Bentuk Akar
- Notasi Ilmiah



Kompetensi Dasar

- 3.1 Menjelaskan dan melakukan operasi bilangan berpangkat bulat dan bentuk akar, serta sifat-sifatnya.
- 4.1 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan sifat-sifat operasi bilangan berpangkat bulat dan bentuk akar.



Pengalaman Belajar

1. Mengidentifikasi, mendeskripsikan, menjelaskan sifat bentuk pangkat berdasarkan hasil pengamatan.
2. Menyelesaikan permasalahan nyata yang berhubungan dengan perpangkatan dan bentuk akar.
3. Menggunakan notasi ilmiah atau bentuk baku untuk menuliskan bilangan yang sangat besar dan sangat kecil.



Sumber: Dokumen Kemdikbud

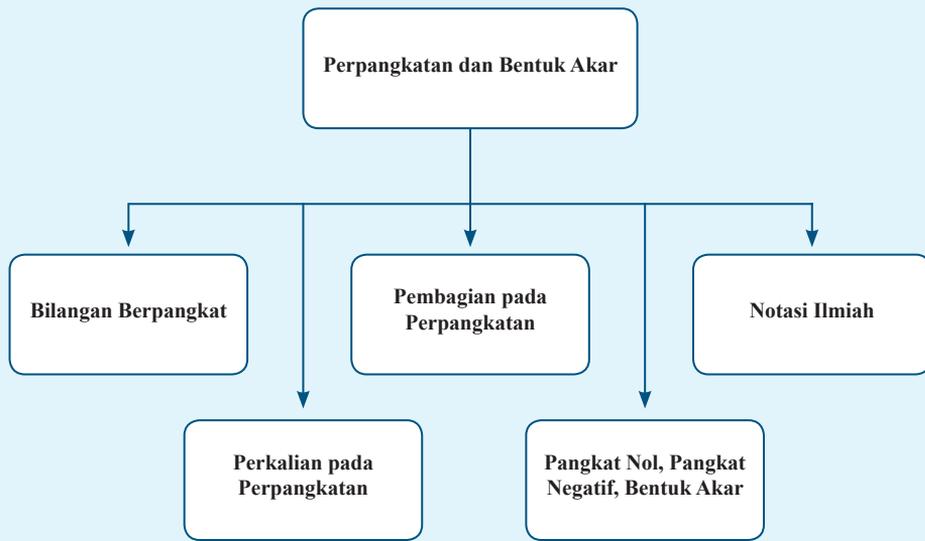
Tahukah kamu berapakah jarak planet bumi ke matahari? Berapa massa matahari, massa bumi, massa bulan, dan lainnya? Kamu telah mempelajarinya dalam pelajaran IPA tentang Tata Surya, bukan? Bagaimana kamu menuliskan jarak tersebut dalam bentuk yang lebih sederhana?

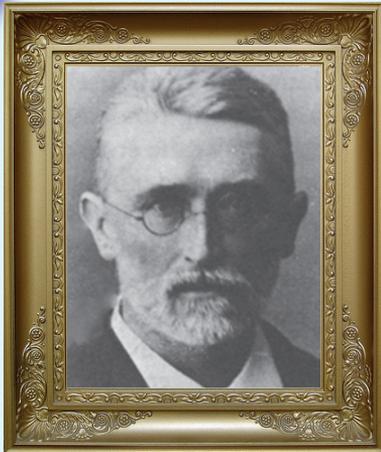
Dapatkah kamu melihat seekor bakteri dengan mata telanjang? Mengapa kamu tidak dapat melihatnya tanpa bantuan mikroskop? Berapakah ukuran panjang bakteri tersebut? Dapatkah kamu menuliskan dalam bentuk yang lebih sederhana untuk ukuran yang sangat kecil tersebut?

Pernahkah kamu mempelajari pembelahan sel pada seekor hewan bersel satu seperti Amoeba dalam pelajaran IPA? Bagaimanakah pola pembelahan seekor Amoeba yang terbentuk tiap satuan waktunya? Berapakah kira-kira jumlah sel yang terbentuk setelah membelah selama waktu tertentu? Kamu tidak mungkin menghitungnya secara pasti, bagaimanakah kamu dapat memperkirakan jumlah tersebut?

Nah, masalah-masalah tersebut di atas dapat diselesaikan dengan konsep perpangkatan. Konsep perpangkatan dan kaitannya dengan bentuk akar akan kita pelajari bersama di Bab 1 ini.







Sumber: www.stanford.edu

Julius Wilhelm Richard Dedekind

Academia, dan *the Académie des Sciences in Paris* (1900). Penghargaan dalam bidang doktoral diberikan kepadanya oleh The Universities of Kristiania (Oslo), Zurich and Brunswick. Pada tahun 1879 Dedekind menerbitkan buku berjudul *Über die Theorie der ganzen algebraischen Zahlen* yang sekali lagi memberikan pengaruh sangat besar terhadap dasar-dasar Matematika. Hikmah yang dapat diambil dari biografi singkat Richard Dedekind antara lain sebagai berikut.

- Semangat Dedekind untuk merumuskan suatu teori bilangan yang lebih sederhana dan dapat dipahami sekaligus sebagai dasar metodologi konsep-konsep modern pada usia yang relatif muda.
- Dedekind tetap rendah hati sehingga dia selalu memiliki semangat belajar yang tinggi sekalipun telah menjadi seorang pengajar.
- Dedekind tidak mudah puas dengan segala penghargaan yang telah dianugerahkan kepadanya terbukti dengan keaktifannya dalam hal penelitian khususnya teori aljabar.

Julius Wilhelm Richard Dedekind lahir pada 3 Oktober 1831 dan wafat pada 12 Februari 1916, pada usia 85 tahun. Beliau merupakan matematikawan berasal dari Jerman yang sangat dipertimbangkan dalam sejarah matematika, sebagai salah satu penemu di bidang matematika. Pemikiran Dedekind banyak dijadikan metode untuk membentuk konsep baru (*The Man and The Number*, 1982). Dedekind menyebutkan bahwa dari konsep itu angka adalah kreasi pikiran manusia. Beliau menemukan konsep bilangan secara kuantitatif dan merupakan representatif suatu label yang disebut bilangan.

Dedekind merupakan professor di Polytechnic School di Zurich, Jerman. Selama hidupnya, Dedekind banyak menerima penghargaan dalam bidang matematika ketika bekerja. Dia terpilih dalam *Göttingen Academy* (1862), *The Berlin Academy* (1880), *Academy of Rome*, *The Leopoldino-California Naturae Curiosorum*





**Pertanyaan
Penting**

Bagaimana kamu dapat menggunakan bentuk pangkat untuk menyederhanakan penulisan sebuah bilangan?

Kegiatan 1

Memahami Konsep Bilangan Berpangkat

Lakukan kegiatan ini dengan langkah-langkah sebagai berikut.

1. Buatlah kelompok yang terdiri atas 5 orang.
2. Sediakan selembar kertas serta sebuah gunting kertas.
3. Lipatlah kertas itu menjadi dua bagian sama besar, yaitu pada sumbu simetri lipatnya.
4. Guntinglah kertas pada sumbu simetri lipatnya.
5. Tumpuklah hasil guntingan kertas sehingga tepat menutupi satu dengan yang lain.
6. Berikan kertas tersebut kepada temanmu berikutnya, lalu lakukan Langkah 3 sampai 5 secara berulang sampai seluruh temanmu dalam kelompokmu mendapat giliran.
7. Banyak kertas hasil guntingan pada tiap-tiap pengguntingan selanjutnya disebut dengan banyak kertas. Tuliskan banyak kertas pada tabel berikut:



Sumber: Dokumen Kemdikbud

Gambar 1.1 Kertas dan gunting

Pengguntingan ke-	Banyak Kertas
1	2
2	...
3	...
4	...
5	...



Dari Kegiatan 1, diperoleh bahwa banyak kertas hasil pengguntingan ke-2 adalah 2 kali lipat dari banyak kertas hasil pengguntingan ke-1. Banyak kertas hasil pengguntingan ke-3 adalah 2 kali lipat dari banyak kertas hasil pengguntingan ke-2, dan seterusnya. Jika kamu melakukan pengguntingan kertas sebanyak n kali maka banyak kertas hasil pengguntingan ke- n adalah

$$\underbrace{2 \times 2 \times 2 \times \dots \times 2}_{2 \text{ sebanyak } n}$$

Perkalian berulang dari bilangan 2 sebanyak n seperti di atas dapat juga ditulis dengan 2^n dan dapat juga disebut dengan perpangkatan 2. Secara umum, perkalian berulang dari suatu bilangan a dapat disebut dengan **perpangkatan a** .

Contoh,

$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5$ dapat disebut dengan **perpangkatan 3**.

$(-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = (-2)^4$ dapat disebut dengan **perpangkatan -2** .



**Ayo Kita
Mencoba**

Lakukan kembali Kegiatan 1, tetapi kertas dilipat menjadi 4 bagian yang sama besar berdasarkan sumbu simetri lipatnya (vertikal dan horizontal). Kemudian tuliskan jawabanmu seperti tabel di atas. Apakah banyak kertas hasil guntingan pada tiap-tiap pengguntingan jumlahnya sama dengan yang telah kamu lakukan sebelumnya? Mengapa hal tersebut bisa terjadi? Jelaskan secara singkat.



**Ayo Kita
Berbagi**

Paparkan/presentasikan percobaan di atas di depan teman sekelasmu.

Kegiatan 2

Menggunakan Notasi Pangkat

Setelah memahami konsep perpangkatan pada Kegiatan 1, selanjutnya pada kegiatan ini kamu akan menyatakan perpangkatan dalam bentuk perkalian berulang.



Ayo Kita Amati

Amatilah tabel berikut ini.

Perpangkatan	Bentuk Perkalian	Nilai
5^2	5×5	25
5^3	$5 \times 5 \times 5$	125
5^4	$5 \times 5 \times 5 \times 5$	625

5^3 merupakan perpangkatan dari 5. Bilangan 5 merupakan *basis* atau bilangan pokok sedangkan 3 merupakan *eksponen* atau pangkat.



Ayo Kita Menanya

Buatlah pertanyaan dengan menggunakan kata "basis" dan "eksponen".



Ayo Kita Mencoba

Setelah mengamati tabel di atas, lengkapilah tabel di bawah ini.

Perpangkatan	Bentuk Perkalian	Nilai
2^4		
3^3		
4^5		
5^4		
10^7		

Berdasarkan tabel di atas, tuliskan kembali 8^n dengan n bilangan bulat positif dalam bentuk perkalian.





**Ayo Kita
Simpulkan**

Setelah melakukan Kegiatan 2, apa yang dapat kamu simpulkan berkaitan dengan perpangkatan?

Perpangkatan adalah perkalian berulang dari suatu bilangan yang sama. Bilangan pokok dalam suatu perpangkatan disebut Banyaknya bilangan pokok yang dikalikan secara berulang disebut

Sehingga bentuk umum dari perpangkatan adalah

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{\text{sebanyak } n}, \quad \text{dengan } n \text{ bilangan bulat positif}$$

a disebut dengan, n disebut

Materi Esensi 1.1

Bilangan Berpangkat

Perpangkatan adalah perkalian berulang dari suatu bilangan yang sama. Bentuk umum dari perpangkatan adalah

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{\text{sebanyak } n}, \quad \text{dengan } n \text{ bilangan bulat positif}$$

Contoh, perpangkatan 3 seperti di bawah ini:

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5$$

3^5 adalah perpangkatan 3.

3 disebut sebagai bilangan pokok (*basis*) sedangkan 5 sebagai pangkat (*eksponen*).

Contoh 1

Menuliskan Perpangkatan

Nyatakan perkalian berikut dalam perpangkatan.

a. $(-2) \times (-2) \times (-2)$

Karena (-2) dikalikan berulang sebanyak tiga kali maka $(-2) \times (-2) \times (-2)$ merupakan perpangkatan dengan basis (-2) dan pangkat 3.

Jadi $(-2) \times (-2) \times (-2) = (-2)^3$



b. $y \times y \times y \times y \times y \times y$

Karena y dikalikan berulang sebanyak enam kali maka $y \times y \times y \times y \times y \times y$ merupakan perpangkatan dengan basis y dan pangkat 6.

Jadi $y \times y \times y \times y \times y \times y = y^6$

Contoh 2

Menghitung Nilai Perpangkatan

1. Nyatakan perpangkatan $(-0,3)^2$ dan $(0,3)^2$ dalam bentuk bilangan biasa.

$$(-0,3)^2 = (-0,3) \times (-0,3)$$

Tulis kembali dalam bentuk perkalian berulang

$$= 0,09$$

Sederhanakan

$$(0,3)^2 = (0,3) \times (0,3)$$

Tulis kembali dalam bentuk perkalian berulang

$$= 0,09$$

Sederhanakan

2. Nyatakan perpangkatan $(-0,3)^3$ dan $(0,3)^3$ dalam bentuk bilangan biasa.

$$(-0,3)^3 = (-0,3) \times (-0,3) \times (-0,3)$$

Tulis dalam bentuk perkalian berulang

$$= -0,027$$

Sederhanakan

$$(0,3)^3 = (0,3) \times (0,3) \times (0,3)$$

Tulis dalam bentuk perkalian berulang

$$= 0,027$$

Sederhanakan

3. Nyatakan perpangkatan $(-2)^3$ dan $(-2)^4$ dalam bentuk bilangan biasa.

$$(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2)$$

Tulis dalam bentuk perkalian berulang

$$= -8$$

Sederhanakan

$$(-2)^4 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2)$$

Tulis dalam bentuk perkalian berulang

$$= 16$$

Sederhanakan



**Ayo Kita
Menalar**

Berdasarkan Contoh 2, tentukan perbedaan dari:

1. Perpangkatan dengan basis bilangan positif dan negatif.
2. Perpangkatan dengan eksponen bilangan ganjil dan genap.

Jelaskan jawabanmu.



Contoh 3**Operasi yang Melibatkan Perpangkatan**

Tentukan hasil operasi berikut.

- a. $3 + 2 \times 5^2$ Ingat kembali mengenai urutan operasi hitung
 $3 + 2 \times 5^2 = 3 + 2 \times 25$ Hitung hasil perpangkatan
 $= 3 + 50$ Lakukan operasi perkalian
 $= 53$ Lakukan operasi penjumlahan
- b. $4^3 : 8 + 3^2$
 $4^3 : 8 + 3^2 = 64 : 8 + 9$ Hitung hasil tiap-tiap perpangkatan
 $= 8 + 9$ Lakukan operasi pembagian dulu
 $= 17$ Lakukan operasi penjumlahan



**Ayo Kita
Tinjau Ulang**

Selesaikan soal-soal di bawah ini.

1. Tuliskan ke dalam bentuk perpangkatan.

- a. $\left(-\frac{2}{3}\right) \times \left(-\frac{2}{3}\right) \times \left(-\frac{2}{3}\right) \times \left(-\frac{2}{3}\right)$
b. $t \times t \times 2 \times 2 \times 2$

2. Tentukan hasil dari:

- a. $9 : 3 \times 4^3$
b. $\left(\frac{1}{8}\right)^3 \times 4^2 + \frac{1}{2}$
c. -6^6

3. Tentukan nilai dari:

- a. $p^n + (-p)^n$ untuk p bilangan bulat dan n bilangan asli genap,
b. $p^n + (-p)^n$ untuk p bilangan bulat dan n bilangan asli ganjil.



6. Tuliskan sebagai bentuk perpangkatan dengan basis 5.
- 5
 - 625
 - 15.625
 - 125
7. Tentukan hasil dari operasi berikut ini.
- $5 + 3 \times 2^4$
 - $\frac{1}{2}(6^3 - 4^2)$
 - $8 + 3 \times (-3)^4$
 - $(6^4 - 4^4) : 2$
 - $\left(\frac{1}{4}\right)^4 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^2$
 - $\left(\frac{1}{4}\right)^4 : -\left(\frac{1}{3}\right)^2$
8. Temukan nilai x pada persamaan matematika di bawah ini.
- $7^x = 343$
 - $2^x = 64$
 - $10^x = 10.000$
 - $5^x = 625$
9. Tim peneliti dari Dinas Kesehatan suatu daerah di Indonesia Timur meneliti suatu wabah yang sedang berkembang di Desa X. Tim peneliti tersebut menemukan fakta bahwa wabah yang berkembang disebabkan oleh virus yang tengah berkembang di Afrika. Dari hasil penelitian didapatkan bahwa virus tersebut dapat berkembang dengan cara membelah diri menjadi 3 virus setiap setengah jam dan menyerang sistem kekebalan tubuh. Berapa jumlah virus dalam tubuh manusia setelah 6 jam?
10. **Tantangan.** Dalam sebuah penelitian, diketahui seekor amoeba S berkembang biak dengan membelah diri sebanyak 2 kali tiap 15 menit.
- Berapa jumlah amoeba S selama satu hari jika dalam suatu pengamatan terdapat 4 ekor amoeba S?
 - Berapa jumlah amoeba S mula-mula sehingga dalam 1 jam terdapat minimal 1.000 Amoeba S?



1.2

Perkalian pada Perpangkatan


**Pertanyaan
Penting**

Bagaimana hasil perkalian dari dua perpangkatan dengan basis yang sama?

Kegiatan 1
Mengalikan Dua Perpangkatan dengan Basis yang Sama

Ayo Kita Amati

Amatilah tabel di bawah ini.

Operasi Perkalian pada Perpangkatan	Operasi Perkalian	Perpangkatan
$3^2 \times 3^3$	$(3 \times 3) \times (3 \times 3 \times 3)$	3^5
$(-3)^2 \times (-3)^3$	$(-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3)$	$(-3)^5$
$y^5 \times y^2$	$(y \times y \times y \times y \times y) \times (y \times y)$	y^7


**Ayo Kita
Mencoba**

Setelah kamu mengamati tabel di atas, lengkapilah tabel di bawah ini.

Operasi Perkalian pada Perpangkatan	Operasi Perkalian	Perpangkatan
$6^3 \times 6^2$		
$4,2^2 \times 4,2^3$		
$7^4 \times 7^2$		



Operasi Perkalian pada Perpangkatan	Operasi Perkalian	Perpangkatan
$\left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^5$		
$\left(-\frac{1}{3}\right)^3 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^4$		
$5^3 \times 3^3$		

Setelah melengkapi tabel di atas, informasi apakah yang kamu dapatkan mengenai operasi perkalian pada perpangkatan?



Ayo Kita Menalar

Sederhanakan operasi perkalian pada perpangkatan dengan basis a di bawah ini.

$$a^m \times a^n = a \dots$$

Apakah aturan yang kamu dapatkan berlaku untuk operasi perkalian pada perpangkatan dengan basis yang berbeda? Sebagai contoh pada $5^4 \times 2^3$, apakah dapat diterapkan aturan di atas? Jelaskan jawabanmu.



Ayo Kita Simpulkan

Bagaimana cara menentukan hasil operasi perkalian pada perpangkatan dengan basis yang sama?

Kegiatan 2**Memangkatkan Suatu Perpangkatan**

Amati tabel berikut ini.

Pemangkatan Suatu Perpangkatan	Bentuk Perkalian Berulang	Perpangkatan
$(4^2)^3$	$4^2 \times 4^2 \times 4^2 = (4 \times 4) \times (4 \times 4) \times (4 \times 4)$ $= 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4$	4^6
$(4^3)^2$	$4^3 \times 4^3 = (4 \times 4 \times 4) \times (4 \times 4 \times 4)$ $= 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4$	4^6
$(s^4)^2$	$s^4 \times s^4 = (s \times s \times s \times s) \times (s \times s \times s \times s)$ $= s \times s$	s^8
$(s^2)^4$	$s^2 \times s^2 \times s^2 \times s^2 = (s \times s) \times (s \times s) \times (s \times s) \times (s \times s)$ $= s \times s$	s^8

Dari tabel di atas, perhatikan kembali kolom pertama dan ketiga. Apa yang dapat kamu simpulkan?



Ayo Kita Menanya

Setelah mengamati tabel di atas, buatlah pertanyaan yang berhubungan dengan “memangkatkan suatu perpangkatan”.



*Ayo Kita
Mencoba*

Setelah mengamati tabel di atas, salin dan lengkapi tabel di bawah ini.

Pemangkatan Suatu Perpangkatan	Bentuk Perkalian Berulang	Perpangkatan
$(7^4)^3$		
$(7^3)^4$		
$(t^4)^3$		
$(t^3)^4$		

Secara umum bentuk $(a^m)^n$ dapat diubah menjadi

$$(a^m)^n = a^{\dots\dots}$$



*Ayo Kita
Simpulkan*

Bagaimana cara menentukan hasil dari perpangkatan yang dipangkatkan?

Kegiatan 3

Memangkatkan Suatu Perkalian Bilangan



Ayo Kita Amati

Amatilah tabel di bawah ini.



Pemangkatan Pada Perkalian Bilangan	Bentuk Perkalian Berulang	Perpangkatan
$(2 \times 3)^3$	$(2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3)$ $= 2 \times 3 \times 2 \times 3 \times 2 \times 3$ $= (2 \times 2 \times 2) \times (3 \times 3 \times 3)$	$2^3 \times 3^3$
$(2 \times 5)^4$	$(2 \times 5) \times (2 \times 5) \times (2 \times 5) \times (2 \times 5)$ $= 2 \times 5 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5$ $= (2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (5 \times 5 \times 5 \times 5)$	$2^4 \times 5^4$
$(b \times y)^2$	$(b \times y) \times (b \times y)$ $= b \times y \times b \times y$ $= (b \times b) \times (y \times y)$	$b^2 \times y^2$



**Ayo Kita
Mencoba**

Lengkapilah tabel di bawah ini.

Pemangkatan Pada Perkalian Bilangan	Bentuk Perkalian Berulang	Perpangkatan
$(7 \times 9)^3$		
$(13 \times 7)^5$		
$(n \times y)^2$		
$(6 \times t)^3$		
$(2 \times 7)^4$		

Secara umum bentuk $(a \times b)^m$ dapat diubah menjadi

$$(a \times b)^m = \dots\dots\dots$$



**Ayo Kita
Simpulkan**

Bagaimana cara menentukan hasil perpangkatan pada perkalian bilangan?

Kegiatan 4

Permainan Menuliskan Perpangkatan

Lakukan kegiatan ini secara berkelompok.



**Ayo Kita
Mencoba**

1. Siapkan 1 lembar kertas karton, penggaris, pensil, serta uang koin.
2. Buatlah tabel seperti gambar di bawah ini.

	1	2	3
1			
2			
3			

3. Tumpuklah koin pada tiap-tiap kotak dengan ketentuan berikut.

Banyaknya koin pada kotak dengan baris x dan kolom y adalah $2^x \times 2^y$

Contoh: pada baris ke-1 dan kolom ke-2 tabel di atas, banyak koin

$$2^1 \times 2^2 = 2^3 = 8 \text{ koin.}$$

Berdasarkan percobaan di atas, jawablah pertanyaan di bawah ini.

- a. Berapa jumlah koin pada baris ke-3 dan kolom ke-2?
- b. Pada baris dan kolom berapa terdapat koin sejumlah 32?
- c. Pada baris dan kolom berapa terdapat koin paling banyak, dan berapa banyaknya?





Ayo Kita Menalar

Berdasarkan konsep yang diperoleh dari Kegiatan 4, jawablah pertanyaan berikut ini.

1. Jika tabel yang kamu buat berukuran 5×5 , tentukan berapa banyak koin pada baris ke-5 dan kolom ke-3?
2. Berapa tinggi tumpukan koin pada baris ke-5 dan kolom ke-5, jika sebuah koin memiliki tebal 0,2 cm?

Materi Esensi 1.2

Perkalian pada Perpangkatan

Hasil kali dari perpangkatan dengan basis yang sama

Sifat perkalian dalam perpangkatan: $a^m \times a^n = a^{m+n}$

Contoh: $3^2 \times 3^3 = 3^{2+3} = 3^5$

Hasil pemangkatan dari perpangkatan dengan basis yang sama

Sifat pemangkatan pada perpangkatan: $(a^m)^n = a^{m \cdot n} = a^{mn}$

Contoh: $(3^2)^3 = 3^{2 \cdot 3} = 3^6$

Hasil perpangkatan dari suatu perkalian bilangan

Sifat perpangkatan dari perkalian bilangan: $(a \cdot b)^m = a^m b^m$

Contoh: $(2 \cdot 3)^3 = 2^3 \cdot 3^3$

Contoh 1

Menyederhanakan Operasi Perkalian pada Perpangkatan

Sederhanakan operasi perkalian pada perpangkatan berikut ini.

- | | | |
|----|---|-------------------------------------|
| a. | $4^3 \times 4^2 = 4^{3+2}$ | Jumlahkan pangkatnya |
| | $= 4^5$ | Sederhanakan |
| b. | $(-4)^2 \times (-4)^3 = (-4)^2 \times (-4)^3$ | Samakan bentuk basis menjadi (-4) |
| | $= (-4)^{2+3}$ | Jumlahkan pangkat dari basis (-4) |
| | $= (-4)^5$ | Sederhanakan |
| c. | $m^3 \times m^5 = m^{3+5}$ | Jumlahkan pangkat dari basis m |
| | $= m^8$ | Sederhanakan |



Contoh 2**Memangkatkan Suatu Perpangkatan**

Sederhanakan operasi pemangkatan pada perpangkatan berikut ini.

- a. $(4^3)^2 = 4^3 \times 4^3$ Ubah menjadi bentuk perkalian berulang
 $= 4^{3+3}$ Jumlahkan pangkatnya
 $= 4^6$ Sederhanakan
- b. $(x^3)^4 = x^3 \times x^3 \times x^3 \times x^3$ Ubah menjadi bentuk perkalian berulang
 $= x^{3+3+3+3}$ Jumlahkan pangkatnya
 $= x^{12}$ Sederhanakan

Contoh 3**Perpangkatan pada Perkalian Bilangan**

Sederhanakan perpangkatan pada perkalian bilangan berikut ini.

- a. $(4y)^2 = 4y \times 4y$ Ubah menjadi bentuk perkalian berulang
 $= (4 \times 4) \times (y \times y)$ Kelompokkan basis yang sama
 $= 4^2 \times y^2$ Jumlahkan tiap-tiap pangkatnya
 $= 16y^2$ Sederhanakan
- b. $(wy)^3 = wy \times wy \times wy$ Ubah menjadi bentuk perkalian berulang
 $= (w \times w \times w) \times (y \times y \times y)$ Kelompokkan yang sama
 $= w^3y^3$ Sederhanakan



**Ayo Kita
Tinjau Ulang**

1. Sederhanakan perkalian dari perpangkatan berikut.

a. $7^3 \times 7^2$ b. $\left(\frac{1}{3}\right)^6 \times \left(\frac{1}{3}\right)^4$ c. $t \times t^{-1}$

2. Sederhanakan bentuk berikut.

a. $(9^4)^3$ b. $(z^3)^6$ c. $\left(\left(\frac{2}{3}\right)^3\right)^2$



3. Sederhanakan operasi berikut ini.

a. $7^2 \times 7^3$

b. $(9^3)^4$

Bandingkan jawaban soal nomor 3(a) dengan soal nomor 1 (a) dan soal nomor 3 (b) dengan soal nomor 2(a). Apakah jawaban yang kamu dapat bernilai sama? Mengapa demikian? Jelaskan.

Latihan 1.2

Perkalian pada Perpangkatan

1. Sederhanakan perpangkatan berikut ini.

a. $4^6 \times 4^3$

d. $(5^2)^3$

b. $(-7)^3 \times (-7)^2$

e. $5^2 \times \left(\frac{2}{5}\right)^3 \times \left(\frac{2}{5}\right)^5$

c. $4(-2,5)^4 \times (-2,5)^3$

2. Tuliskan bentuk $w^3 \times w^4$ ke dalam bentuk perpangkatan paling sederhana. Berapakah hasilnya? Apakah kamu juga dapat menyederhakan bentuk $w^3 \times n^4$? Jelaskan jawabanmu.

3. Sederhanakan operasi aljabar berikut ini.

a. $y^3 \times 2y^7 \times (3y)^2$

b. $b \times 2y^7 \times b^3 \times y^2$

c. $3m^3 \times (mn)^4$

d. $(tn^3)^4 \times 4t^3$

e. $(2x^3) \times 3(x^2y^2)^3 \times 5y^4$

4. Tentukan nilai dari perpangkatan berikut ini.

a. $3^3 \times 2 \times 3^7$

c. $\frac{1}{2} \times \left(\left(-\frac{1}{2}\right)^3\right)^4$

b. $(2^2 \times 1^6) + 50$

d. $2^4 \times 4 \times 2^3$

5. Nyatakan perpangkatan berikut dalam bentuk paling sederhana.

a. $4^3 \times 2^6$

c. $4 \times 3^4 + 5 \times 3^4$

b. $(3^2)^5 \times 3^5$

d. $(-125) \times (-5)^6$



6. Nyatakan bilangan di bawah ini dalam bentuk yang memuat perpangkatan dengan basis 2.

a. 64

c. 100

b. 20

d. $\frac{128}{3}$

7. Tentukan nilai x yang memenuhi persamaan berikut ini.

a. $(3^x)^x = 81$

b. $\frac{1}{64} \times 4^x \times 2^x = 64$

8. **Berpikir Kritis.** Nyatakan hasil kali perpangkatan berikut dalam bentuk pangkat yang lebih sederhana. Jelaskan. Gunakan cara yang lebih mudah.

$$4^3 \times 5^6$$

9. Ketinggian suatu benda dapat ditentukan dengan menggunakan rumus gerak jatuh

bebas, yaitu $h = \frac{1}{2}gt^2$ di mana h adalah ketinggian benda (dalam satuan meter),

g adalah percepatan gravitasi bumi (m/s^2), dan t adalah waktu yang diperlukan benda sampai jatuh ke tanah "(s)". Sebuah benda jatuh dari puncak sebuah gedung dengan percepatan $9,8 m/s^2$ dan waktu yang diperlukan untuk sampai di tanah adalah 10 detik, berapa tinggi gedung tersebut?

10. Diketahui: $3^{1500} + 9^{750} + 27^{500} = 3^b$, berapakah nilai b ?

11. **Analisis Kesalahan.** Jelaskan dan perbaiki kesalahan dalam menyederhanakan hasil perkalian bentuk pangkat berikut ini.

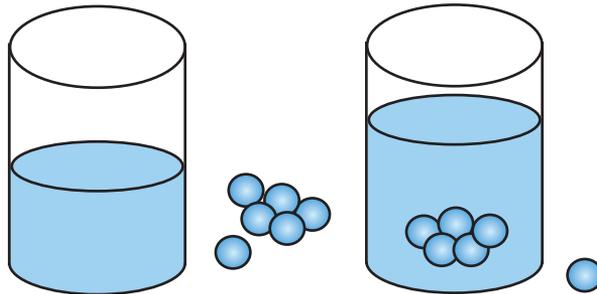
a. $3^6 \times 3^4 = (3 \times 3)^{6+4} = 9^{10}$

b. $(t^{-3})^6 = t^{-3+6} = t^3$

12. **Tantangan.** Pada sebuah pasar tradisional perputaran uang yang terjadi setiap menitnya diperkirakan kurang lebih Rp81.000.000,00. Pada hari Senin–Jumat proses perdagangan terjadi rata-rata 12 jam tiap hari. Sedangkan untuk Sabtu–Minggu proses jual-beli terjadi rata-rata 18 jam tiap hari. Berapa jumlah perputaran uang di pasar tradisional tersebut selama 1 minggu? (nyatakan jawabanmu dalam bentuk perpangkatan).



13. **Tantangan.** Sebuah bola karet dengan diameter 7 cm direndam dalam sebuah bejana berisi minyak tanah selama 3 jam. Jika pertambahan diameter bola karet tersebut 0,002 mm/detik, berapakah volume bola karet setelah proses perendaman?



Sumber: Dokumen Kemdikbud

Gambar 1.2 Bejana berisi minyak tanah dan bola karet

Keterangan: gunakan rumus volumer bola: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, dengan $\pi = 3,14$ dan r adalah jari-jari bola.

1.3

Pembagian pada Perpangkatan



Pertanyaan Penting

Bagaimana hasil pembagian dari dua perpangkatan yang memiliki basis sama?

Kegiatan 1

Pembagian pada Perpangkatan



Ayo Kita Amati

Amatilah tabel di bawah ini.

Pembagian Pada Perpangkatan	Bentuk Perkalian Berulang	Perpangkatan
$\frac{3^9}{3^4}$	$\frac{3 \times 3 \times 3}{3 \times 3 \times 3 \times 3}$	3^5



Pembagian pada Perpangkatan	Bentuk Perkalian Berulang	Perpangkatan
$\frac{(-2)^6}{(-2)^3}$	$\frac{(-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2)}{(-2) \times (-2) \times (-2)}$	$(-2)^3$
$\frac{6^8}{6^4}$	$\frac{6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6}{6 \times 6 \times 6 \times 6}$	6^4



**Ayo Kita
Menanya**

Buatlah pertanyaan yang berkaitan dengan “pembagian pada perpangkatan”.



**Ayo Kita
Mencoba**

Setelah kamu mengamati tabel di atas, lengkapilah tabel di bawah ini.

Pembagian pada Perpangkatan	Bentuk Perkalian Berulang	Perpangkatan
$\frac{(4,2)^{10}}{(4,2)^5}$		
$\frac{(-7)^7}{(-7)^5}$		
$\frac{2^7}{2^1}$		
$\frac{(-2,5)^4}{(-2,5)^2}$		
$\frac{10^9}{10^3}$		



Secara umum bentuk $\frac{a^m}{a^n}$ dapat diubah menjadi

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{\dots\dots\dots}$$



**Ayo Kita
Simpulkan**

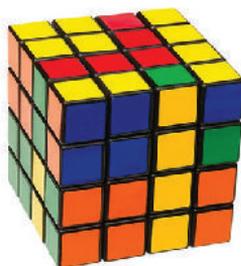
Bagaimana cara untuk mendapatkan hasil pembagian pada perpangkatan?

Kegiatan 2

Membandingkan Volume

Perhatikan gambar kubus di bawah ini.

a. Kubus besar dengan $s = 4$ satuan



Sumber: www.toysrus.com

Gambar 1.3 Rubik ukuran $4 \times 4 \times 4$

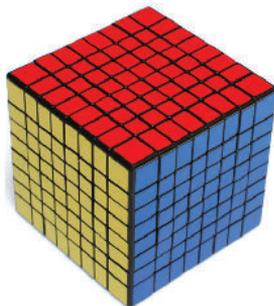
Kubus kecil dengan $s = 2$ satuan



Sumber: www.bestworldstuff.blogspot.com

Gambar 1.4 Rubik ukuran $2 \times 2 \times 2$

b. Kubus besar dengan $s = 8$ satuan



Sumber: www.cs.brandeis.edu

Gambar 1.5 Rubik ukuran $8 \times 8 \times 8$

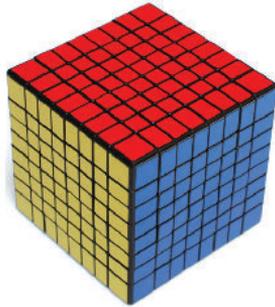
Kubus kecil dengan $s = 4$ satuan



Sumber: www.toysrus.com

Gambar 1.6 Rubik ukuran $4 \times 4 \times 4$

c. Kubus besar dengan $s = 8$ satuan



Sumber: www.cs.brandeis.edu

Gambar 1.7 Rubik ukuran $8 \times 8 \times 8$

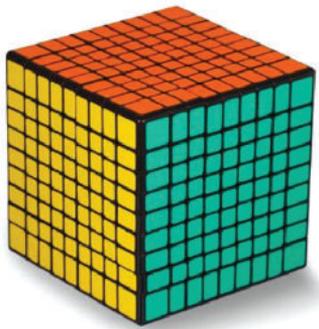
Kubus kecil dengan $s = 2$ satuan



Sumber: www.bestworldstuff.blogspot.com

Gambar 1.8 Rubik ukuran $2 \times 2 \times 2$

d. Kubus besar dengan $s = 9$ satuan



Sumber: www.thespeedcube.com

Gambar 1.9 Rubik ukuran $9 \times 9 \times 9$

Kubus kecil dengan $s = 3$ satuan



Sumber: www.pebbryant.blogspot.com

Gambar 1.10 Rubik ukuran $3 \times 3 \times 3$

Tentukan volume tiap-tiap kubus dan bandingkan volume kubus besar terhadap volume kubus kecil dengan panjang panjang rusuk s . Catat hasil yang kamu peroleh dalam tabel.

	Volume Kubus Besar	Volume Kubus Kecil	$\frac{\text{Volume Kubus Besar}}{\text{Volume Kubus Kecil}}$
a.	$4^3 = (2^2)^3 = 2^6$	2^3	$\frac{2^6}{2^3} = 2^{6-3} = 2^3$
b.			
c.			
d.			





Diskusi

1. Bagaimana cara membagi dua perpangkatan dengan basis yang sama?
2. Berikan dua contoh lain yang mendukung jawaban.

Kegiatan 3

Perpangkatan pada Pecahan



Ayo Kita Amati

Amatilah tabel di bawah ini.

Perpangkatan pada Pecahan	Bentuk Perkalian Berulang	Bentuk Pembagian pada Perpangkatan
$\left(\frac{2}{3}\right)^3$	$\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2 \times 2 \times 2}{3 \times 3 \times 3}$	$\frac{2^3}{3^3}$
$\left(-\frac{2}{3}\right)^3$	$\left(-\frac{2}{3}\right) \times \left(-\frac{2}{3}\right) \times \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{2 \times 2 \times 2}{3 \times 3 \times 3}$	$-\frac{2^3}{3^3}$
$\left(-\frac{2}{3}\right)^4$	$\left(-\frac{2}{3}\right) \times \left(-\frac{2}{3}\right) \times \left(-\frac{2}{3}\right) \times \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2}{3 \times 3 \times 3 \times 3}$	$\frac{2^4}{3^4}$



Ayo Kita Mencoba

Setelah kamu mengamati tabel pada Kegiatan 3, lengkapilah tabel di bawah ini.

Perpangkatan pada Pecahan	Bentuk Perkalian Berulang	Bentuk Pembagian pada Perpangkatan
$\left(\frac{4}{5}\right)^4$		

Perpangkatan pada Pecahan	Bentuk Perkalian Berulang	Bentuk Pembagian pada Perpangkatan
$\left(-\frac{4}{5}\right)^4$		
$\left(-\frac{4}{5}\right)^5$		
$\left(\frac{5}{3}\right)^3$		
$\left(-\frac{5}{3}\right)^3$		
$\left(-\frac{5}{3}\right)^4$		



**Ayo Kita
Simpulkan**

Secara umum bentuk $\left(\frac{a}{b}\right)^n$ dapat diubah menjadi

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{\dots}{\dots}$$



Materi Esensi 1.3

Pembagian pada Perpangkatan

Hasil bagi dari perpangkatan dengan basis yang sama

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Contoh:

$$\frac{3^6}{3^4} = 3^{6-4} = 3^2$$

Perpangkatan pada pecahan

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Contoh:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3}$$

Contoh 1

Pembagian pada Perpangkatan

- $\frac{4^3}{4^2} = 4^{3-2}$
 $= 4$
Kurangkan pangkat basis 4
Sederhanakan
- $\frac{(-4)^7}{(-4)^2} = (-4)^{7-2}$
 $= (-4)^5$
Kurangkan pangkat basis (-4)
Sederhanakan
- $\frac{x^5}{x^2} = x^{5-2}$
 $= x^3$
Kurangkan pangkat basis x
Sederhanakan

Contoh 2

Menyederhanakan Operasi pada Perpangkatan

Sederhanakan bentuk $\frac{4^3 \times 4^8}{4^5}$. Tuliskan jawaban dalam perpangkatan.

$$\begin{aligned}\frac{4^3 \times 4^8}{4^5} &= \frac{4^{3+8}}{4^5} && \text{Jumlahkan pangkat dari pembilang} \\ &= \frac{4^{11}}{4^5} && \text{Sederhanakan} \\ &= 4^{11-5} && \text{Kurangkan pangkat dari basis 4} \\ &= 4^6 && \text{Sederhanakan}\end{aligned}$$



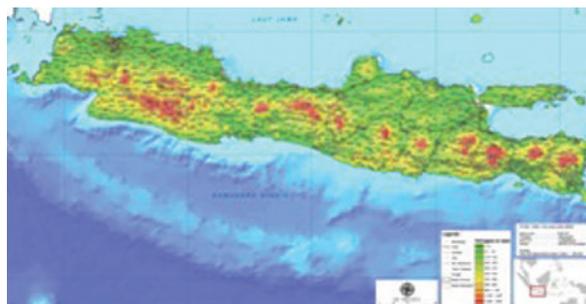
Contoh 3**Operasi Perkalian dan Pembagian pada Perpangkatan**

Sederhanakan bentuk $\frac{b^4}{b^2} \times \frac{b^6}{b^3}$. Tuliskan jawaban dalam perpangkatan.

$$\begin{aligned} \frac{b^4}{b^2} \times \frac{b^6}{b^3} &= b^{4-2} \times b^{6-3} && \text{Kurangkan pangkat} \\ &= b^2 \times b^3 && \text{Sederhanakan} \\ &= b^{2+3} && \text{Jumlahkan pangkat} \\ &= b^5 && \text{Sederhanakan} \end{aligned}$$

Contoh 4**Penerapan Pembagian pada Perpangkatan dalam Kehidupan Nyata**

Berdasarkan data BPS tahun 2010 (www.bps.go.id), jumlah penduduk pulau Jawa mencapai 130 juta jiwa (melalui proses pembulatan). Sedangkan luas pulau Jawa $1,3 \times 10^5$ km². Berapakah kepadatan penduduk pulau Jawa tahun 2010?



Sumber: www.geospasial.bnpb.go.id

Gambar 1.11 Peta Pulau Jawa

Penyelesaian:

Diketahui: jumlah penduduk Jawa = 130 juta jiwa = 130.000.000 = $1,3 \times 10^8$ jiwa

Luas Pulau Jawa = $1,3 \times 10^5$ km²

$$\text{Kepadatan penduduk} = \frac{\text{Jumlah penduduk}}{\text{Luas area}}$$

$$= \frac{1,3 \times 10^8}{1,3 \times 10^5} \quad \text{Subtitusikan populasi penduduk dan luas area}$$

$$= \frac{1,3}{1,3} \times \frac{10^8}{10^5} \quad \text{Tulis kembali dalam bentuk pembagian terpisah}$$

$$= 1 \times 10^{8-5} \quad \text{Kurangkan pangkat}$$

$$1.000 = 1 \times 10^3 \quad \text{Sederhanakan}$$

Jadi, kepadatan penduduk pulau Jawa tahun 2010 yaitu 1.000 jiwa/km²



**Ayo Kita
Tinjau Ulang**

1. Sederhanakan perpangkatan berikut.

a. $\frac{8^4}{8^1}$

b. $\frac{2,3^7}{2,3^3}$

c. $\frac{(-8)^9}{(-8)^3}$

2. Sederhanakan perpangkatan berikut.

a. $\frac{8^4 \times 8^2}{8^3}$

b. $\frac{(-2,3)^{10}}{(-2,3)^3 \times (-2,3)^2}$

c. $\frac{b^9}{b^3} \times \frac{b^7}{b^4}$

3. Sederhanakan bentuk berikut ini $\frac{6^3 \times 3^5}{2^3}$.

4. Pada Contoh 4, jika populasi penduduk pulau Jawa bertambah 1% setiap 10 tahun, hitung kepadatan penduduk pulau Jawa pada tahun 2020 dan 2030.

Latihan 1.3

Pembagian pada Perpangkatan

1. Sederhanakan perpangkatan berikut ini.

a. $\frac{(-4)^5}{(-4)^2}$

f. $\frac{5^5}{5^2 \times 5^3}$

b. $\frac{(-4)^6}{(-4)^2}$

g. $\frac{2^7 \times 6^7}{4^7}$

c. $\frac{0,3^7}{0,3^3}$

h. $\frac{6^7 \times 3^3}{2^7}$

d. $\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^9}{\left(\frac{2}{5}\right)^5}$

i. $\frac{10^6 \times 4^2}{25^3 \times 8^3}$

e. $\frac{3^7 \times 3^2}{3^3}$

j. $\frac{21^5}{9^2} : \left(\frac{7}{2}\right)^2$



2. Sederhanakan bentuk aljabar berikut ini.

a. $\frac{(-y)^5}{(-y)^2}$

d. $\frac{42y^8}{12y^5}$

b. $\frac{\left(\frac{1}{t}\right)^7}{\left(\frac{1}{t}\right)^3}$

e. $\frac{\left(\frac{1}{t}\right)^7}{\left(\frac{1}{t}\right)^3} \times \frac{\left(\frac{1}{t}\right)^3}{\left(\frac{1}{t}\right)^2}$

c. $\frac{3m^7}{m^3}$

f. $\frac{3w^4}{w^2} \times 5w^3$

3. Sederhanakan.

a. $\frac{0,2^4 \times 0,2^2}{0,2^5}$

d. $\frac{3 \times 5^4}{5^3} - 15$

b. $\frac{-5^5}{(-5)^2 \times (-5)^2}$

e. $\frac{4^5}{4^4} - \frac{2^4}{2^3} \times 6$

c. $12 + \frac{4^7}{4^6}$

4. Tuliskan kembali perpangkatan berikut dalam tiga bentuk pembagian perpangkatan yang berbeda.

a. 2^5

b. p^3

5. Dapatkan nilai n dari pembagian pada perpangkatan di bawah ini.

a. $\frac{s^2}{s^4} \times \frac{s^9}{s^3} = s^n$

b. $\frac{3^6}{3^2} = n \times 9$

6. **Berpikir Kritis.** Diberikan persamaan $\frac{5^m}{5^n} = 5^4$.

a. Tentukan dua bilangan m dan n yang bernilai dari 1 sampai dengan 9 sehingga dapat memenuhi persamaan di atas.

b. Tentukan banyak penyelesaian dari persamaan tersebut. Jelaskan jawabanmu.

7. Bilangan $\frac{2^{2.015} + 2^{2.014} + 2^{2.013}}{14}$ setara dengan 2^y , untuk y suatu bilangan bulat positif. Tentukan nilai y .



8. Populasi bakteri yang tersebar dalam suatu wadah berbentuk persegi panjang yaitu sebanyak $4,2 \times 10^7$. Jika panjang dan lebar wadah tersebut masing-masing 10 cm dan 7 cm, berapa kepadatan bakteri pada wadah tersebut?
9. **Analisis Kesalahan.** Jelaskan dan perbaiki kesalahan dalam menyederhanakan bentuk di bawah ini.

$$\frac{7^{13}}{7^5} = 7^{\frac{13}{5}} = 7^8$$

10.



Sumber: Dokumen Kemdikbud
Gambar 1.12 Pesawat

Tantangan. Intensitas bunyi percakapan manusia 10^6 kali intensitas suara manusia berbisik. Sedangkan intensitas bunyi pesawat lepas landas 10^{14} kali intensitas suara bisikan manusia. Berapa kali intensitas bunyi pesawat lepas landas dibandingkan dengan bunyi percakapan manusia?

1.4

Pangkat Nol, Pangkat Negatif, dan Bentuk Akar



Pertanyaan Penting

Bagaimana kamu mendefinisikan bilangan real tak nol berpangkat nol dan berpangkat bulat negatif? Bagaimana hubungan bilangan pangkat dengan bentuk akar?

Kegiatan 1

Bilangan Real Tak Nol Pangkat Nol

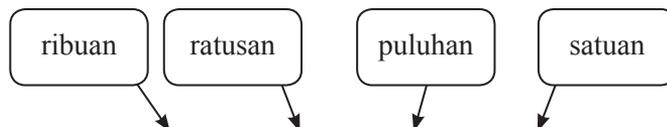


Ayo Kita Amati

Perhatikan notasi berikut ini.

$$5.749 = 5.000 + 700 + 40 + 9$$

$$= 5 \times 1.000 + 7 \times 100 + 4 \times 10 + 9 \times 1$$



$$5.749 = 5 \times 10^3 + 7 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 9 \times 10^0$$



- Pola apakah yang kamu dapat dari tiga bilangan berpangkat pertama? Lanjutkan pola untuk mendapatkan pangkat yang terakhir.
- Tuliskan kesimpulan yang kamu peroleh.



**Ayo Kita
Mencoba**

Salin dan lengkapi tabel di bawah ini

Lakukan bersama temanmu dan diskusikan.

Gunakan Sifat Operasi Pembagian pada Perpangkatan	Hitung Hasil Operasinya	Kesimpulan
$\frac{2^5}{2^5} = 2^{5-5} = 2^0$	$\frac{2^5}{2^5} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2} = \frac{32}{32} = 1$	$2^0 = 1$
$\frac{4^4}{4^4} =$		
$\frac{5^3}{5^3} =$		
$\frac{(-3)^2}{(-3)^2} =$		
$\frac{(-2)^3}{(-2)^3} =$		



**Ayo Kita
Menalar**

- Periksalah setiap hasil pada kolom pertama dan kolom kedua. Kesimpulan apa yang dapat kalian peroleh?
- Gunakan hasil di atas untuk mendefinisikan a^0 untuk a bilangan tak nol.

Lakukan bersama temanmu dan diskusikan.



**Ayo Kita
Mencoba**

Salin dan lengkapi tabel di bawah ini.

Suatu Bilangan Dikalikan 1 Sama dengan Bilangan Itu Sendiri	Gunakan Sifat Operasi Perkalian pada Perpangkatan	Kesimpulan
$5^3 \times 1 = 5^3$	$5^3 \times 5^0 = 5^3 \times 1 = 5^3$	$5^0 = 1$
$\dots \times 4^2 = 4^2$	$4^0 \times 4^2 = \dots$	
$(-2)^3 \times \dots = (-2)^3$	$(-2)^3 \times (-2)^0 = \dots$	
$(-3)^2 \times \dots = (-3)^2$	$(-3)^2 \times (-3)^0 = \dots$	
$\dots \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\left(\frac{1}{2}\right)^0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \dots$	



**Ayo Kita
Menalar**

- Periksalah setiap hasil pada kolom pertama dan kolom kedua. Kesimpulan apa yang dapat kalian peroleh?
- Gunakan hasil di atas untuk mendefinisikan a^0 untuk a bilangan real tak nol.



**Ayo Kita
Simpulkan**

Setelah melakukan Kegiatan 1, tuliskan definisi nilai a (pangkat) 0 untuk a bilangan tak nol.

Untuk setiap a bilangan real tak nol, a^0 bernilai

Secara aljabar dapat ditulis kembali sebagai berikut:

$$a^0 = \dots \text{ untuk } a \text{ bilangan real dan } a \neq 0.$$



Ayo Silakan Bertanya

Silakan bertanya kepada guru atau temanmu jika masih belum memahami konsep bilangan pangkat nol.

Kegiatan 2

Bilangan Real Tak Nol Pangkat Bulat Negatif



Ayo Kita Amati

Coba amati pola dan operasi perpangkatan berikut. Lakukan bersama temanmu dan diskusikan.

Bilangan	Gunakan Sifat Pembagian Perpangkatan	Kesimpulan
$\frac{1}{2} = \frac{1}{2^1}$	$\frac{1}{2} = 1 : 2 = 2^0 : 2^1 = 2^{0-1} = 2^{-1}$	$\frac{1}{2^1} = 2^{-1}$
$\frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{2^2} = 1 : 2^2 = 2^0 : 2^2 = 2^{0-2} = 2^{-2}$	$\frac{1}{2^2} = 2^{-2}$
$\frac{1}{8} = \frac{1}{2^3}$	$\frac{1}{2^3} = 1 : 2^3 = 2^0 : 2^3 = 2^{0-3} = 2^{-3}$	$\frac{1}{2^3} = 2^{-3}$



Ayo Kita Mencoba

Salin dan lengkapi tabel di bawah ini

Bilangan	Gunakan Sifat Pembagian Perpangkatan	Kesimpulan
$\frac{1}{32} = \frac{1}{2^5}$		
$\frac{1}{81} = \frac{1}{3^4}$		
$\frac{1}{216} = \frac{1}{6^3}$		



Ayo Kita Amati

Coba amati pola dan operasi perpangkatan berikut.

Lakukan bersama temanmu dan diskusikan.

Bilangan	Gunakan Sifat Perkalian atau Pembagian Perpangkatan	Kesimpulan
1.000	$1.000 = 10^1 \times 10^1 \times 10^1 = 10^{1+1+1} = 10^3$	$1.000 = 10^3$
100	$100 = 10^1 \times 10^1 = 10^{1+1} = 10^2$	$100 = 10^2$
10	$10 = 10^1$	$10 = 10^1$
1	$1 = 10^0$	$1 = 10^0$
$\frac{1}{10} = \frac{1}{10^1}$	$\frac{1}{10} = 1 : 10 = 10^0 : 10^1 = 10^{0-1} = 10^{-1}$	$\frac{1}{10^1} = 10^{-1}$
$\frac{1}{100} = \frac{1}{10^2}$	$\frac{1}{100} = 1 : 100 = 10^0 : 10^2 = 10^{0-2} = 10^{-2}$	$\frac{1}{10^2} = 10^{-2}$



Ayo Kita Mencoba

Berdasarkan pengamatan dan diskusi di atas, lengkapi tabel di bawah ini.

Bilangan	Gunakan Sifat Pembagian Perpangkatan	Kesimpulan
$\frac{1}{1.000} = \frac{1}{10^3}$		
$\frac{1}{10.000} = \frac{1}{10^4}$		
$\frac{1}{100.000} = \frac{1}{10^5}$		



Ayo Kita Menalar

- Periksalah setiap hasil kolom pertama dan kolom kedua pada tabel-tabel di atas. Kesimpulan apa yang dapat kalian peroleh?
- Gunakan hasil di atas untuk mendefinisikan a^{-n} untuk a bilangan real tak nol dan n bilangan bulat.



Ayo Kita Simpulkan

Setelah melakukan Kegiatan 2, tuliskan definisi nilai a^{-n} untuk a bilangan real tak nol dan n bilangan bulat.

Untuk setiap a bilangan real tak nol dan n bilangan bulat, berlaku:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \text{ untuk } a \neq 0, a \text{ bilangan real dan } n \text{ bilangan bulat}$$



Ayo Kita Mencoba

Berikut istilah dalam perpangkatan 10 yang sering digunakan.

Lengkapi tabel di bawah ini.

Istilah	Bilangan yang Direpresentasikan	Perpangkatan 10	Istilah	Bilangan yang Direpresentasikan	Perpangkatan 10
Kilo	1.000	10^3	Mili	0,001	10^{-3}
Mega	1.000.000		Mikro	0,000001	
Giga	1.000.000.000		Nano	0,000000001	
Tera	1.000.000.000.000		Pico	0,000000000001	

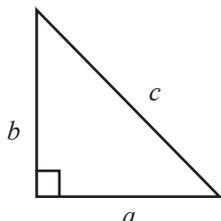
Kegiatan 3

Bentuk Akar



Ayo Kita Amati

Ingat kembali materi tentang Teorema Pythagoras yang sudah kalian pelajari di kelas VIII. Perhatikan dengan seksama langkah-langkah aturan Pythagoras berikut ini.



$$c^2 = a^2 + b^2$$

Rumus umum Teorema Pythagoras

$$\sqrt{c^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Akarkan kedua ruas untuk mendapatkan panjang sisi miring segitiga siku-siku

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Didapatkan persamaan umum untuk mencari panjang sisi miring segitiga siku-siku



Ayo Kita Menanya

Amati proses mendapatkan panjang sisi miring pada segitiga siku-siku dengan menerapkan aturan pythagoras pada kegiatan di atas. Buatlah pertanyaan yang menyatakan hubungan antara pangkat kuadrat dan akar kuadrat.



Ayo Kita Amati

1. Mendapatkan akar kuadrat dari suatu bilangan

Aira mempunyai selembar kain berbentuk persegi dengan luas 14.400 cm^2 untuk membuat taplak meja. Untuk mempercantik taplak, Aira akan menambahkan renda di sekeliling taplak. Berapa meter panjang minimal renda yang diperlukan?

Untuk membantu Aira, kita harus mengetahui panjang sisi persegi agar kita dapat menghitung keliling taplak meja tersebut.

Misal panjang sisi kain adalah $a \text{ cm}$, maka luas kain tersebut adalah

$$a \times a = a^2 = 14.400$$

sehingga,

$$a = \sqrt{14.400}$$

$\sqrt{14.400}$ dibaca “akar kuadrat dari 14.400”.

$$a = 120$$

diskusikan bagaimana mendapatkannya?

$a = 120$ karena $120 \times 120 = 14.400$ atau $120^2 = 14.400$.



Dengan demikian Aira harus menyediakan renda dengan panjang

$$4 \times a = 4 \times 120 = 480.$$

Jadi, panjang minimal renda yang diperlukan adalah 480 cm atau 4,8 m.



Ayo Silakan Bertanya

Buatlah pertanyaan berkaitan dengan cara mencari akar dari suatu bilangan.



Ayo Kita Menalar

- Diskusikan dengan temanmu cara memperkirakan nilai dari $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, dan $\sqrt{200}$.
- Apakah -6 juga merupakan nilai dari $\sqrt{36}$?

Ingat:

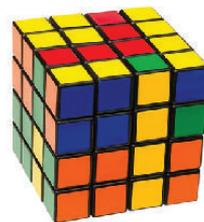
Akar Kuadrat

Jika a tidak negatif, \sqrt{a} adalah bilangan tidak negatif yang kuadratnya adalah a

Jadi, meskipun $(-6) \times (-6) = 36$, nilai dari $\sqrt{36} \neq -6$, tetapi $\sqrt{36} = 6$, karena nilai akar dari suatu bilangan positif selalu positif.

2. Mendapatkan Akar Pangkat n dari Suatu Bilangan

Pada persoalan mencari rusuk suatu kubus bila volume diketahui, maka kita akan berhadapan dengan bentuk akar pangkat tiga. Misalkan diketahui volume suatu kubus adalah 64 cm^3 , berapakah panjang rusuk kubus tersebut?



Sumber: www.toysrus.com

Gambar 1.13 Rubik ukuran $4 \times 4 \times 4$

Misal panjang rusuk tersebut adalah k , maka volume kubus adalah

$$V = k^3 \Leftrightarrow 64 = k^3 \Leftrightarrow k = \sqrt[3]{64}$$

Bagaimanakah kita memperoleh k ?

Ingat bahwa, $4 \times 4 \times 4 = 4^3 = 64$, dengan demikian $\sqrt[3]{64} = 4$

Jadi, panjang rusuk kubus tersebut adalah 4 cm.

Perhatikan juga contoh berikut ini.

$$(-2)^5 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = -32 \text{ sehingga } \sqrt[5]{-32} = -2$$

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81, \text{ sehingga } \sqrt[4]{81} = 3$$

$$(-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) = 81, \text{ apakah } \sqrt[4]{81} = -3? \text{ Jelaskan.}$$

Ingat:

Akar Pangkat n	<ol style="list-style-type: none"> 1. Jika a tidak negatif, maka $\sqrt[n]{a} = b$ jika hanya jika $b^n = a$ dan b tidak negatif. 2. Jika a negatif dan n ganjil, maka $\sqrt[n]{a} = b$ jika hanya jika $b^n = a$.
------------------	---

3. Menyederhanakan perkalian bentuk akar

Jika a dan b bilangan positif, maka berlaku:

$$1. \quad b\sqrt{a} + c\sqrt{a} = (b+c)\sqrt{a}$$

$$2. \quad b\sqrt{a} - c\sqrt{a} = (b-c)\sqrt{a}$$

$$3. \quad \sqrt{ab} = \sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

Jika $a > 0$ dan $b > 0$ maka berlaku $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Amati dan lengkapi tabel berikut.

Bentuk Akar	Penyederhanaan
$\sqrt{8}$	$\sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = \sqrt{4} \times \sqrt{2} = 2 \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$
$\sqrt{45}$	$\sqrt{45} = \sqrt{9 \times 5} = \sqrt{9} \times \sqrt{5} = 3 \times \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$
$\sqrt{0,25}$	$\sqrt{0,25} = \sqrt{\frac{25}{100}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{100}} = \frac{5}{10} = 0,5$



Bentuk Akar	Penyederhanaan
$\sqrt{108}$	
$\sqrt{147}$	
$\sqrt{200}$	
$\sqrt{14.400}$	
$\sqrt{0,0576}$	

Amati dan lengkapi pula tabel berikut.

Bentuk Akar	Penyederhanaan
$\sqrt{12} + \sqrt{27}$	$= \sqrt{4 \times 3} + \sqrt{9 \times 3}$ $= \sqrt{4} \times \sqrt{3} + \sqrt{9} \times \sqrt{3}$ $= 2 \times \sqrt{3} + 3 \times \sqrt{3}$ $= 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3}$ $= (2+3)\sqrt{3}$ $= 5\sqrt{3}$
$\sqrt{8} + \sqrt{18} - \sqrt{32}$	$= \sqrt{4 \times 2} + \sqrt{9 \times 2} - \sqrt{16 \times 2}$ $= \sqrt{4} \times \sqrt{2} + \sqrt{9} \times \sqrt{2} - \sqrt{16} \times \sqrt{2}$ $= 2 \times \sqrt{2} + 3 \times \sqrt{2} - 4 \times \sqrt{2}$ $= 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 4\sqrt{2}$ $= (2+3-4)\sqrt{2}$ $= \sqrt{2}$

Bentuk Akar	Penyederhanaan
$\sqrt{20} + \sqrt{45}$	
$\sqrt{48} + \sqrt{108} - \sqrt{27}$	



Ayo Silakan Bertanya

Ajukan pertanyaan kepada guru atau temanmu berkaitan dengan pangkat nol, pangkat negatif, dan bentuk akar.

Materi perpangkatan dan bentuk akar akan dipelajari kembali lebih detail di SMA.



Ayo Kita Berbagi

Jika kamu sudah memahami apa yang telah kamu pelajari di subbab ini, buatlah rangkuman berdasarkan hasil yang kamu peroleh dari Kegiatan 1 sampai dengan Kegiatan 3 di atas. Bantulah menjelaskan kepada temanmu yang masih kesulitan memahaminya.

Materi Esensi 1.4

Pangkat Nol, Pangkat Negatif, dan Bentuk Akar

PANGKAT NOL

Untuk setiap a bilangan real tak nol, a^0 bernilai 1

Secara aljabar dapat ditulis kembali sebagai berikut:

$$a^0 = 1 \text{ untuk } a \text{ bilangan real dan } a \neq 0$$

PANGKAT NEGATIF

Untuk setiap a bilangan real tak nol dan n bilangan bulat, berlaku:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \text{ untuk } a \neq 0, a \text{ bilangan real dan } n \text{ bilangan bulat}$$



BENTUK AKAR

\sqrt{a} dibaca “akar kuadrat dari a ”

Jika a tidak negatif, \sqrt{a} adalah bilangan tidak negatif di mana $(\sqrt{a})^2 = a$

$\sqrt[n]{a}$ dibaca “akar pangkat n dari a ”

1. Jika a tidak negatif, maka $\sqrt[n]{a} = b$ jika hanya jika $b^n = a$ dan b tidak negatif.
2. Jika a negatif dan n ganjil, maka $\sqrt[n]{a} = b$ jika hanya jika $b^n = a$.

Menyederhanakan perkalian bentuk akar

Jika a dan b bilangan positif, maka berlaku

1. $b\sqrt{a} + c\sqrt{a} = (b + c)\sqrt{a}$
2. $b\sqrt{a} - c\sqrt{a} = (b - c)\sqrt{a}$
3. $\sqrt{ab} = \sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$

Jika a dan b bilangan positif, dan $b \neq 0$, maka jika a dan b bilangan positif, maka

berlaku $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Contoh 1

Pangkat Nol dan Pangkat Negatif

1. Hitung nilai perpangkatan berikut ini.

$$\begin{aligned} \text{a. } 2^{-3} &= \frac{1}{2^3} \\ &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

Gunakan definisi pangkat negatif

Hitung hasil perpangkatannya

$$\begin{aligned} \text{b. } (2,3)^{-3} \times (2,3)^3 &= (2,3)^{-3+3} \\ &= (2,3)^0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Jumlahkan kedua pangkatnya

Sederhanakan

Gunakan definisi bilangan tak nol pangkat nol

$$\begin{aligned} \text{c. } \frac{(-4)^6}{(-4)^8} &= (-4)^{6-8} \\ &= (-4)^{-2} \\ &= \frac{1}{(-4)^2} \\ &= \frac{1}{16} \end{aligned}$$

Kurangkan kedua pangkat

Sederhanakan

Gunakan definisi pangkat negatif

Hitung hasil perpangkatannya

2. Jika $y \neq 0$ dan $t \neq 0$, sederhanakan perpangkatan berikut.

- a. $-2 \times y^0 = -2 \times 1$ Gunakan definisi pangkat negatif
 $= -2$ Menghitung hasil perpangkatan
- b. $\frac{4 \times t^3}{t^5} = 4 \times t^{3-5}$ Kurangkan pangkat pembilang dan penyebut
 $= 4 \times t^{-2}$ Sederhanakan
 $= \frac{4}{t^2}$ Gunakan definisi pangkat negatif

Contoh 2

Air Terbuang Sia-sia



Sumber: www.hadisetyo.com

Gambar 1.14 Kran air

Air menetes sia-sia dari suatu kran air karena tidak ditutup dengan benar. Jika air menetes sebanyak 10^{-3} liter per detik, berapa air yang terbuang selama 10 jam?

Alternatif Penyelesaian:

Konversi waktu 1 jam menjadi detik.

$$1 \text{ jam} \times \frac{60 \text{ menit}}{1 \text{ jam}} \times \frac{60 \text{ detik}}{1 \text{ menit}} = 3.600 \text{ detik}$$

Air yang terbuang sia-sia selama 1 jam:

$$\begin{aligned} 3.600 \text{ detik} \times 10^{-3} \frac{\text{liter}}{\text{detik}} &= 3.600 \times \frac{1}{10^3} \text{ liter} && \text{(gunakan definisi pangkat negatif)} \\ &= 3.600 \times \frac{1}{1.000} \text{ liter} && \text{(hitung nilai perpangkatan)} \\ &= 3,6 \text{ liter} \end{aligned}$$

Air yang terbuang sia-sia selama 10 jam adalah $3,6 \text{ liter} \times 10 = 36 \text{ liter}$.

Jadi, selama 10 jam air yang terbuang sia-sia sebanyak 36 liter.

*Catatan: Biasakanlah hemat air

Contoh 3

Bentuk Akar

1. Sederhanakan bentuk akar berikut.

- a. $\sqrt{75}$ c. $\sqrt{0,000081}$
 b. $\sqrt{500}$ d. $7\sqrt{3} + \sqrt{48} - \sqrt{192}$



Alternatif Penyelesaian:

- a. $\sqrt{75} = \sqrt{25 \times 3} = \sqrt{25} \times \sqrt{3} = 5 \times \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$
- b. $\sqrt{500} = \sqrt{100 \times 5} = \sqrt{100} \times \sqrt{5} = 10 \times \sqrt{5} = 10\sqrt{5}$
- c. $\sqrt{0,000081} = \frac{\sqrt{81}}{\sqrt{1.000.000}} = \frac{9}{1.000} = 0,009$
- d. $7\sqrt{3} + \sqrt{48} - \sqrt{192} = 7\sqrt{3} + \sqrt{16 \times 3} - \sqrt{64 \times 3}$
 $= 7\sqrt{3} + \sqrt{16} \times \sqrt{3} - \sqrt{64} \times \sqrt{3}$
 $= 7\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - 8\sqrt{3}$
 $= 3\sqrt{3}$

Contoh 4

Jarak Pandang Pesawat

Jarak pandang pesawat terbang selama terbang pada kondisi normal dinyatakan dengan $d = 1,5\sqrt{h}$, di mana d adalah jarak pandang dalam meter dan h adalah ketinggian pesawat dalam meter. Jika pengamat berada dalam pesawat yang terbang pada ketinggian 3.600 meter, berapa jarak yang dapat dilihat olehnya?



Sumber: Dokumen Kemdikbud
Gambar 1.15 Pesawat

Alternatif Penyelesaian:

Diketahui:

ketinggian pesawat = $h = 3.600$ meter

jarak pandang pesawat = $d = 1,5\sqrt{h} = 1,5\sqrt{3.600} = 1,5 \times 60 = 90$

Jadi, pada ketinggian 3.600 meter jarak pandang pesawat yaitu 90 meter.



**Ayo Kita
Tinjau Ulang**

1. Tuliskan hasil dari bentuk pangkat berikut ini.

- a. $\frac{3z^3}{z^5}$
- b. $(0,5)^{-3} \times (0,5)^0$
- c. $\frac{4x^{-2}}{x^{-3}}$

2. Sederhanakan bentuk pangkat berikut.

a. $\frac{2^3}{2^5}$

d. $\frac{1}{3^5} \times \frac{1}{3^{-4}}$

b. $(0,5)^{-3}$

e. $\frac{2^4 \times 2^{-2}}{2^5}$

c. $\frac{(-4)^3}{(-4)^3}$

f. $3 : \frac{3^3 \times 3^2}{3^5}$

3. Sederhanakan bentuk akar berikut.

a. $\sqrt{125}$

b. $\sqrt{600}$

c. $\sqrt{0,0000256}$

d. $5\sqrt{3} + \sqrt{243} - \sqrt{12}$

Latihan 1.4

Pangkat Nol, Pangkat Negatif, dan Bentuk Akar

1. **Berpikir Kritis.** Bagaimana kamu dapat menuliskan angka 1 sebagai bentuk perpangkatan dengan basis 5 dan perpangkatan dengan basis 7?

2. Tentukan hasil operasi bilangan berpangkat berikut ini.

a. $3^1 + 3^0$

d. $\left(\frac{1}{6}\right)^{-3}$

b. $(-2)^{-6}$

e. $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}$

c. $(-3^3) \times (-3^0)$

3. Tentukan hasil operasi bilangan berpangkat berikut ini.

a. $\frac{2^3 \times 2^4}{2^6}$

c. $\frac{1}{3^5} \times \frac{1}{3^{-7}}$

b. $\left(-\frac{1}{4}\right)^{-4} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^0 \times \left(-\frac{1}{4}\right)^4$

d. $(-7)^4 \times 7^3$

4. Sederhanakan dalam bentuk pangkat negatif.

a. $\frac{abc}{a^3bc^4}$

b. $\frac{5^5}{5^2}$

c. $\frac{b^5}{b^{-3}}$

d. $r^6 \times r^{-6}$

5. Sederhanakan dalam bentuk pangkat positif.

a. $2m^{-4} \times m^{-3}$

b. $\frac{6^7}{6^3}$

c. $\frac{b^{-6}}{b^{-3}}$

d. $\frac{1}{a^3bc^{-4}}$

6. Sederhanakan bentuk operasi perpangkatan berikut ini.

a. $18t^3 \times 2t^{-3}$

b. $\frac{2y^0t^3}{y^6t^{-2}}$

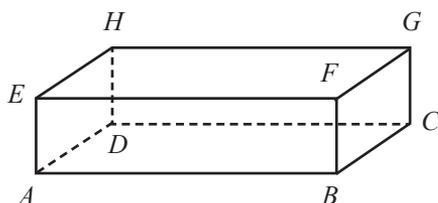
c. $2m^0 \times m^{-7}$

d. $m^3 + \frac{4}{m^{-3}}$

7. **Analisis Kesalahan.** Jelaskan dan perbaiki kesalahan dalam penyederhanaan berikut ini.

$$\begin{aligned}d^{-5} &= (-d) \times (-d) \times (-d) \times (-d) \times (-d) \\ &= (-d)^5\end{aligned}$$

8. Tentukan panjang diagonal ruang balok di bawah ini dengan panjang rusuk $AB = 12$ cm, $BC = 5$ cm, dan $CG = 4$ cm.



9. **Tantangan.** Pada sebuah pabrik kertas HVS dilakukan pengemasan kertas per rim (1 rim = 500 lembar). Jumlah pesanan yang harus dipenuhi pabrik tersebut tiap harinya adalah 30 karton box dengan masing-masing karton box berisi 30 rim kertas. Berapakah rim kertas HVS yang harus diproduksi dalam 1 bulan? (1 bulan adalah 30 hari)



Sumber: www.tempo.co.id

Gambar 1.16 Pengemasan kertas

10. **Tantangan.** Setiap tanggal 10 Budi melakukan aktivasi paket internet murah dengan kapasitas 1 Gigabyte (GB) untuk telepon selularnya dan masa aktif berlaku sampai tanggal 10 pada bulan berikutnya. Jika Budi melakukan aktivasi pada tanggal 10 Agustus 2016, berapakah kapasitas rata-rata tiap hari yang digunakan Budi agar tetap dapat menggunakan paket internet hingga 9 September 2016? (Tuliskan jawaban kamu dalam satuan *Megabyte*)
11. **Tantangan.** Pada soal nomor 9, andaikan paket internet Budi habis pada tanggal 30 Agustus 2016, berapa rata-rata kapasitas yang digunakan Budi tiap harinya? (Tuliskan jawaban kamu dalam satuan *Byte*)
12. Setiap kantong darah yang didonasikan oleh para pendonor kepada Palang Merah Indonesia (PMI) berisi 0,5 L darah. ($1 \text{ mm}^3 = 10^{-3} \text{ mL}$)
- Jika dalam setiap 1 mm^3 darah mengandung 3×10^4 sel darah putih, berapa jumlah sel darah putih dalam satu kantong darah tersebut? Tuliskan jawabanmu dalam bentuk perpangkatan paling sederhana.
 - Jika dalam setiap 1 mm^3 darah mengandung 7×10^6 sel darah merah, berapa jumlah sel darah merah dalam satu kantong darah tersebut? Tuliskan jawabanmu dalam bentuk perpangkatan paling sederhana.

13. Sederhanakan bentuk akar berikut.

a. $\sqrt{112}$

b. $\sqrt{216}$

c. $\sqrt{605}$

d. $\sqrt{800}$

e. $\sqrt{5.000}$

f. $\sqrt{0,000121}$

g. $\sqrt{0,00000324}$

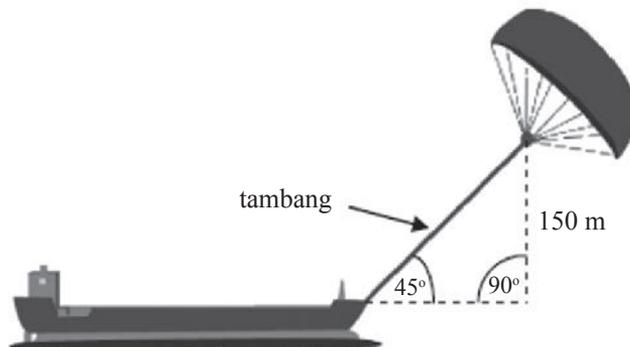
h. $9\sqrt{2} + \sqrt{72} - \sqrt{578}$

i. $7\sqrt{3} + \sqrt{48} - \sqrt{768}$

j. $9\sqrt{5} - \sqrt{125} + \sqrt{720}$

14. Pak Asep memiliki sebuah kolam renang berbentuk silinder di belakang rumahnya. Diameter kolam tersebut adalah $14\sqrt{3}$ meter dengan kedalaman $150\sqrt{2}$ cm. Apabila Pak Asep ingin mengisi kolam tersebut sampai penuh, berapa liter air yang dibutuhkan oleh Pak Asep? Tuliskan jawabanmu dalam bentuk perpangkatan paling sederhana.

15. Sebuah kapal tenaga angin seperti gambar di bawah. Perkirakan panjang tali layar agar menarik kapal pada sudut 45° dan ketinggian layar 150 m.
(Soal PISA 2012)





**Pertanyaan
Penting**

Bagaimana membaca dan menuliskan notasi ilmiah?

Kegiatan 1

Menggunakan Kalkulator



**Ayo Kita
Mencoba**

Lakukan dan diskusikan bersama temanmu.

1. Dengan menggunakan kalkulator, kalikan dua bilangan besar. Sebagai contoh 2 milyar dikalikan dengan 3 milyar

$$2000.000.000 \times 3000.000.000$$

Berapa nilai yang muncul di layar kalkulator?

Kamu mungkin akan melihat bahwa hasilnya adalah $6.00000000e + 18$

Bentuk $6.00000000e + 18$ bisa dinyatakan dengan 6×10^{18} yang biasa disebut dengan notasi ilmiah (bentuk baku).

2. Tentukan hasil perkalian 40.000.000.000 dengan 600.000.000.000 tanpa menggunakan kalkulator. Berapa hasilnya?
3. Apa yang dapat kamu simpulkan dari hasil (1) dan (2)?
4. Ulangi lagi (1) sampai dengan (3) di atas, untuk bilangan besar 70.000.000.000.000 dikalikan dengan 30.000.000.000.000.



Sumber: www.studentcalculators.co.uk

Gambar 1.17 Kalkulator



**Ayo Kita
Menanya**

Setelah melakukan percobaan di atas, buatlah pertanyaan yang berkaitan dengan penulisan perpangkatan yang ditunjukkan kalkulator.



Ayo Kita Mencoba

1. Kalikan dua bilangan yang sangat kecil dengan kalkulator, misalkan $0,000000002$ dikalikan dengan $0,000000003$. Bagaimana hasil yang ditunjukkan oleh kalkulatormu? Jelaskan.
2. Lakukan kembali dengan dua bilangan kecil lainnya.
3. Kesimpulan apa yang kamu peroleh?



Diskusi

Bagaimana kamu dapat menuliskan sebuah bilangan dalam bentuk notasi ilmiah?

Kegiatan 2

Penulisan Notasi Ilmiah



Ayo Kita Mencoba

Berikut ini diberikan suatu besaran yang dituliskan dalam bentuk notasi ilmiah dan dalam bentuk bilangan biasa.

- a. Mengubah bentuk notasi ilmiah menjadi bilangan biasa

Kisaran luas total daratan Indonesia adalah $1,92 \times 10^{12} \text{ m}^2$. Jika dituliskan dalam bentuk bilangan biasa menjadi

$$= 1,92 \times 1.000.000.000.000 \text{ m}^2$$
$$= 1.920.000.000.000 \text{ m}^2$$

- b. Kisaran diameter galaksi Bimasakti adalah $1,135 \times 10^{18}$. Tuliskan dalam bentuk bilangan biasa.



Sumber: www.beautiful-indonesia.umm.ac.id

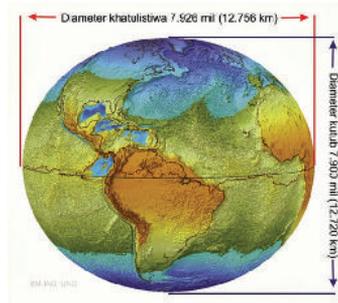
Gambar 1.18 Peta Indonesia



Sumber: www.guardianlv.com

Gambar 1.19 Galaksi Bima Sakti

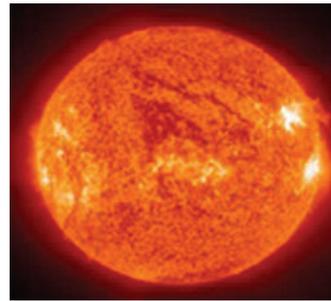
- c. Kisaran diameter bumi adalah $1,27 \times 10^7$ m. Tuliskan dalam bentuk bilangan biasa.



Sumber: www.smiagiung.blogspot.com

Gambar 1.20 Bumi

- d. Kisaran diameter matahari adalah 1.390.000.000 m. Tuliskan dalam bentuk notasi ilmiah.



Sumber: www.greenpeace.org

Gambar 1.21 Matahari

- e. Kisaran luas Samudera Pasifik adalah 180.000.000 km². Tuliskan dalam bentuk notasi ilmiah.



Sumber: www.wayantulus.com

Gambar 1.22 Samudera Pasifik



**Ayo Kita
Simpulkan**

Setelah melakukan Kegiatan 1 dan 2, tuliskan kesimpulan mengenai penulisan notasi ilmiah (bentuk baku) suatu bilangan.

Materi Esensi 1.5

Notasi Ilmiah

Notasi ilmiah (bentuk baku) dari suatu bilangan positif dituliskan dalam bentuk $a \times 10^n$ dengan ... $1 < a < 10$... dan n adalah bilangan bulat.

Misalkan notasi ilmiah untuk 2.300 adalah

nilai a lebih dari 1 dan kurang dari 10

$$\rightarrow 2,3 \times 10^3 \leftarrow$$

nilai n bilangan bulat

Catatan:

Bilangan lebih atau sama dengan 10

Gunakan pangkat positif ketika kamu memindahkan titik desimal ke kiri.

Contoh:

$$8.500.000 = 8,5 \times 1.000.000 = 8,5 \times 10^6$$

$$144.000.000 = 1,44 \times 100.000.000 = 1,44 \times 10^8$$

Bilangan antara 0 dan 1

Gunakan pangkat negatif ketika kamu memindahkan titik desimal ke kanan.

Contoh:

$$0,0000085 = 8,5 : 1.000.000 = 8,5 \times 10^{-6}$$

$$0,0000000144 = 1,44 : 100.000.000 = 1,44 \times 10^{-8}$$

Contoh 1

Menulis Notasi Ilmiah Menjadi Bentuk Biasa

Nyatakan bentuk ilmiah berikut ini menjadi bentuk biasa.

a. $2,16 \times 10^5$

b. $0,16 \times 10^{-3}$

Penyelesaian:

a. $2,16 \times 10^5 = 2,16 \times 100.000$ Dapatkan hasil dari perpangkatan 5 dengan basis 10

$$= 216.000$$

Lakukan operasi perkalian dengan memindahkan tanda desimal sebanyak 5 tempat ke kanan

- b. $0,16 \times 10^{-3} = 0,16 \times 0,001$ Dapatkan hasil dari perpangkatan (-3) dengan basis 10
 $= 0,00016$ Lakukan perkalian dengan memindahkan tanda desimal sebanyak 3 tempat ke kiri

Contoh 2

Menulis Notasi Ilmiah dari Suatu Bilangan

Nyatakan dalam bentuk ilmiah.

- 155×10^6
- $46,78 \times 10^{-3}$
- 2.300.000
- 0,0000695

Penyelesaian:

- $155 \times 10^6 = 1,55 \times 100 \times 10^6 = 1,55 \times 10^2 \times 10^6 = 1,55 \times 10^8$
- $46,78 \times 10^{-3} = 4,678 \times 10 \times 10^{-3} = 4,678 \times 10^{-2}$
- $2.300.000 = 2,3 \times 1.000.000 = 2,3 \times 10^6$
- $0,0000695 = 6,95 : 100.000 = 6,95 : 10^5 = 6,95 \times 10^{-5}$



*Ayo Kita
Tinjau Ulang*

Tuliskan bentuk baku dari bilangan berikut.

- 12×10^5
- 123×10^{-7}
- 4567×10^6
- 6.780.000
- 78.000.000.000
- 0,000678
- 0,00000000078

Tuliskan bentuk bilangan biasa dari bilangan berikut.

- 5.500
- 79.999
- 150.000.000
- 9.876.000.000.000
- 0,007777
- 0,00000123
- 0,0000000765



6. **Analisis Kesalahan.** Jelaskan dan perbaiki kesalahan dalam penulisan bilangan bentuk baku berikut.

a. $125.000.000 = 12,5 \times 10^7$

b. $0,0000055 = 5,5 \times 10^6$

c. $1,3 \times 10^{-4} = 13.000$

7. Massa planet Jupiter adalah $1,9 \times 10^{22}$ kg, sedangkan massa planet Bumi adalah 30% dari Jupiter. Berapakah massa planet Bumi? Tuliskan jawabanmu dalam bentuk baku atau notasi ilmiah.



Sumber: www.teknologi.news.viva.co.id

Gambar 1.24 Planet Jupiter

8. Massa Bumi adalah 5.972.190.000.000.000.000 kg. Tuliskan dalam bentuk baku.

9. **Tantangan.** Lihatlah soal nomor 1. Berapakah kisaran harga memori yang dapat digunakan tiap *byte*? Tuliskan jawabanmu dalam bentuk baku.



Sumber: www.tsumasaga.wordpress.com

Gambar 1.25 Planet Bumi

10. Budi sedang melakukan percobaan di laboratorium dengan menggunakan mikroskop. Mikroskop yang digunakan dapat mengamati suatu organisme menjadi 1.000 kali lebih besar dari ukuran sebenarnya. Bakteri yang diamati oleh Budi memiliki diameter dengan ukuran 5×10^{-5} milimeter. Berapa diameter bakteri yang terlihat pada mikroskop (dalam cm)? Tuliskan jawabanmu dalam bentuk notasi ilmiah.



Proyek 1

1. Seorang ayah memberikan sebuah tantangan kepada anaknya untuk menghitung jumlah uang koin yang diperlukan untuk memenuhi papan catur. Pada kotak pertama diberi 1 uang koin, kotak kedua 2 uang koin, 4 uang koin untuk kotak ketiga, 8 koin untuk kotak keempat demikian berlanjut sampai memenuhi 64 kotak.
 - a. Bantu anak tersebut menentukan susunan banyak koin pada tiap-tiap kotak papan catur tersebut. Nyatakan dalam bentuk perpangkatan.
 - b. Jika berat tiap-tiap uang koin adalah 16 gr, hitunglah berat uang koin pada tiap-tiap kotak. Nyatakan dalam bentuk perpangkatan.
 - c. Susunlah penyelesaian nomor a dan b dalam satu tabel.
 - d. Banyak uang yang harus dikeluarkan untuk memenuhi papan catur, jika uang koin yang digunakan adalah Rp200,00, berapa rupiah uang yang diperlukan untuk memenuhi semua kotak?

2. Gunakan akses internet untuk mendapatkan populasi penduduk di 5 negara dengan penduduk terpadat di dunia.
 - a. Nyatakan jumlah tiap-tiap populasi penduduk tersebut dalam bentuk notasi ilmiah/bentuk baku.
 - b. Carilah luas wilayah di negara tersebut. Selanjutnya hitunglah kepadatan penduduk tiap-tiap negara. Nyatakan jawabanmu dalam bentuk baku.
 - c. Melalui cara yang sama, carilah informasi tentang pertumbuhan penduduk tiap tahunnya. Selanjutnya perkirakan jumlah penduduk 10 tahun ke depan di tiap-tiap negara tersebut.
 - d. Dari informasi yang kamu dapatkan pada butir c, hitunglah kepadatan penduduk 10 tahun ke depan.

Uji Kompetensi 1**Perpangkatan dan Bentuk Akar**

1. Dapatkan hasil dari operasi perpangkatan berikut ini.

$$\frac{64^2 + 16^3}{4^5}$$

2. Dapatkan bentuk perpangkatan yang ekuivalen dengan bilangan di bawah ini (Jawaban dapat lebih dari satu bentuk perpangkatan).

a. $\sqrt[2]{8}$

b. $\sqrt[3]{27}$

3. Diketahui $\frac{(x^{n-1}y^n)^3}{x^{2n}y^{6+n}}$ senilai dengan $x^a y^b$. Tentukan nilai $\frac{b}{a}$.

4. Sederhanakan operasi perpangkatan berikut ini.

a. $y^3 \times (3y)^2$

b. $\sqrt{b}2y^5 \times b^3 6y^2$

c. $(tn^3)^4 \times 4t^3$

d. $(2x^3) \times 3(x^2y^2)^3 \times 5y^4$

5. Tuliskan bilangan di bawah ini dalam notasi ilmiah.

a. 0,00000056

b. 2.500.000

c. 0,98

d. 10.000.000.000.000

6. Hitung hasil perpangkatan berikut ini. Tuliskan jawabanmu dalam notasi ilmiah.

a. 12×2^3

b. $7,27 \times 10^2 - 0,5 \times 10^3$

c. $(8,32 \times 10^4) : (4 \times 10^{-6})$

d. $3,7 \times 10^3 \times 5,2 \times 10^{-3}$

7. Diberikan $x = 24$ dan $y = 54$. Tentukan hasil operasi di bawah ini. Tuliskan jawabanmu dalam bentuk perpangkatan yang paling sederhana.

a. $x \times y$

b. $\frac{x}{y}$

8. Berapakah hasil operasi perpangkatan $492^5 - 246^5$?

9. Berapa banyak detik dalam kurun waktu 60.000 tahun? Tuliskan hasilnya dalam notasi ilmiah.

10. Tuliskan hasil operasi perpangkatan berikut ini.

a. -8×2^6

c. $\frac{16}{2^4}$

b. $5^4 \times 50$

d. $\frac{98}{7^3}$

11. **Tantangan.** Pada acara lomba 17 Agustusan di SMPN 1 Taman, diadakan lomba mengisi air dalam wadah berbentuk kerucut dengan melewati perjalanan sejauh 5 m. Pada pengambilan awal, tiap peserta mengisi setiap wadah secara penuh. Setiap meter yang ditempuh maka air akan berkurang sebanyak $\frac{1}{10}$ bagian. Berapakah



Sumber: Dokumen Kemdikbud

air yang terkumpul dalam satu kali perjalanan? (ukuran wadah: diameter = 10 cm dengan tinggi 12 cm. $V_{\text{kerucut}} = \frac{1}{3} \pi r^2 t$).

12. Urutkan bilangan berikut ini, dari yang terbesar ke terkecil.

a. 7

d. $0,98 \times 10^4$

b. 0,89

e. 0,0045

c. $5,2 \times 10^3$

f. 1.000

13. Cahaya bergerak dengan kecepatan 3×10^8 m/detik. Berapa jauh cahaya bergerak dalam satu tahun? Tuliskan hasilnya dalam notasi ilmiah.

14. Tuliskan hasil perpangkatan berikut ini.

a. $\frac{1}{2}(6^3 - 4^2)$

c. $(6^4 - 4^4) : 3$

b. $8 + 3 \times (-3)^4$

d. $\left(\frac{1}{4}\right)^4 \times \left(-\frac{1}{16}\right)^2$

15. Dapatkan nilai n dari persamaan berikut ini.

a. $3^n = 243$

c. $4^n = (-2)^0$

b. $2^{n+1} = \frac{1}{16}$

d. $48 : 3 = n^4$

16. Satu karung yang berisi beras memiliki massa 50 kg. Andaikan tiap-tiap butir beras yang terdapat dalam karung tersebut memiliki massa yang sama, yaitu $2,5 \times 10^{-2}$ gram. Berapakah banyak butir beras dalam karung tersebut? Tuliskan jawabanmu dalam bentuk perpangkatan paling sederhana.

17. Seluruh planet yang ada dalam tata surya melakukan gerakan revolusi mengelilingi matahari. Planet Neptunus memerlukan waktu sekitar $2,5 \times 10^2$ tahun untuk mengelilingi matahari dalam satu putaran penuh. Matahari memerlukan waktu selama $2,25 \times 10^8$ tahun untuk mengelilingi pusat Galaksi Bimasakti dalam satu putaran penuh. Berapa banyak revolusi yang dilakukan oleh Planet Neptunus dalam mengelilingi matahari ketika matahari menyelesaikan gerakan mengelilingi pusat Galaksi Bimasakti dalam satu putaran penuh?

18. Setiap jantung manusia rata-rata memompa sekitar 7×10^{-2} liter darah dalam setiap detak jantung. Dalam tiap menitnya, rata-rata jantung manusia berdetak 70 kali. Berapa liter darah yang dipompa oleh jantung manusia dalam waktu 1 tahun (1 tahun = 365 hari)? Tuliskan jawabanmu dalam notasi ilmiah, bulatkan sampai 2 tempat desimal.

19. Nyatakan pernyataan matematika berikut sebagai pernyataan Benar (B) atau Salah (S). Berikan alasanmu.

a. $\frac{6^3}{6^3} = 0$

c. $\left(\frac{2}{5}\right)^7 = \frac{2^7}{5^{-7}}$

b. $(2 \times 6)^5 = 2^5 \times 6^5$

d. $4^3 \times 4^7 = 2^{20}$



20. Sederhanakan bentuk di bawah ini.

a. $\left(\frac{a^5b^3c^3}{4bc}\right) \times \left(\frac{8ac}{3bc^{-3}}\right)$

b. $2m^0 \times m^{\frac{2}{3}}$

c. $m^3 + \frac{4}{m^{-3}}$

21. Diberikan $x = 27$ dan $y = 63$. Tentukan hasil dari operasi di bawah ini. Tuliskan jawabanmu dalam bentuk bilangan berpangkat paling sederhana.

a. x^3y

b. $\frac{x}{\sqrt{y}}$

22. Tuliskan dalam bentuk pangkat paling sederhana.

a. $\frac{243}{20}$

c. $\frac{50}{625}$

b. $\frac{500}{9}$

d. $\frac{49}{686}$

23. Perhatikan tabel berikut ini.

Satuan Panjang	Panjang (dalam meter)
Kilometer	10^3
Hektometer	10^2
Dekameter	10^1
Meter	1
Desimeter	10^{-1}
Sentimeter	10^{-2}
Milimeter	10^{-3}
Mikrometer	10^{-6}
Nanometer	10^{-9}

Dengan menggunakan tabel di atas, isilah titik-titik di bawah ini (nyatakan dalam bentuk perpangkatan)

- a. 1 hektometer = millimeter
- b. 1 kilometer = sentimeter
- c. 1 dekameter = mikrometer
- d. 1 desimeter = nanometer

24. Perhatikan tabel unsur-unsur kimia beserta jari-jari atomnya berikut ini. Semua pengukuran dituliskan dalam satuan nanometer.

Nama Unsur	Jari-jari Atom
Magnesium	$1,44 \times 10^5$
Oksigen	$4,8 \times 10^4$
Pospor	$9,6 \times 10^4$
Kalsium	$1,92 \times 10^5$
Barium	$2,4 \times 10^5$

- a. Apakah jari-jari atom Pospor lebih panjang daripada jari-jari atom Magnesium?
 - b. Unsur apa yang memiliki jari-jari atom terbesar dan terkecil?
 - c. Berapa kalikah panjang jari-jari atom Barium jika dibandingkan dengan jari-jari atom Oksigen?
 - d. Berapa kalikah panjang jari-jari atom Kalsium jika dibandingkan dengan jari-jari atom Pospor?
25. Misalkan diperoleh data bahwa rata-rata penduduk Indonesia menghasilkan 2,5 liter sampah per hari. Jika diasumsikan total penduduk Indonesia adalah 250 juta jiwa, berapa meter kubik sampah yang dihasilkan oleh seluruh penduduk Indonesia dalam kurun waktu 1 bulan (30 hari)? (1 liter = 1 dm^3)





Bab II

Persamaan dan Fungsi Kuadrat



Kata Kunci

- Fungsi Kuadrat
- Akar Kuadrat
- Persamaan Kuadrat



Kompetensi Dasar

- 3.2 Menjelaskan persamaan kuadrat dan karakteristiknya berdasarkan akar-akarnya serta cara penyelesaiannya.
- 3.3 Menjelaskan fungsi kuadrat dengan menggunakan tabel, persamaan, dan grafik.
- 3.4 Menjelaskan hubungan antara koefisien dan diskriminan fungsi kuadrat dengan grafiknya.
- 4.2 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan persamaan kuadrat.
- 4.3 Menyajikan fungsi kuadrat menggunakan tabel, persamaan, dan grafik.
- 4.4 Menyajikan dan menyelesaikan masalah kontekstual dengan menggunakan sifat-sifat fungsi kuadrat.



Sumber: Dokumen Kemdikbud

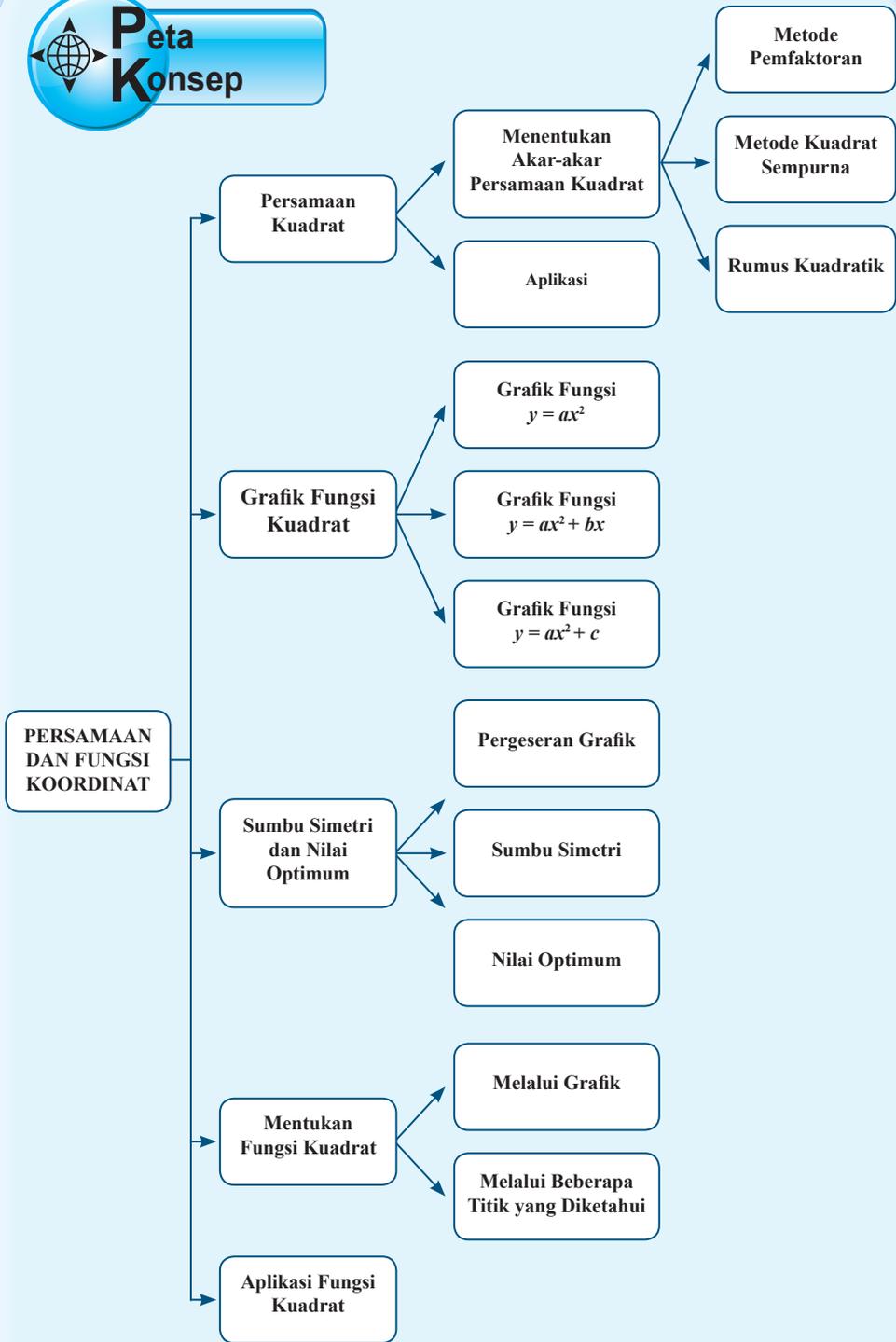
Fungsi kuadrat adalah suatu fungsi yang berbentuk $f(x) = ax^2 + bx + c$. Grafik fungsi ini berbentuk parabola yang mempunyai nilai optimum. Dalam aplikasi dunia nyata ini sangat berguna.

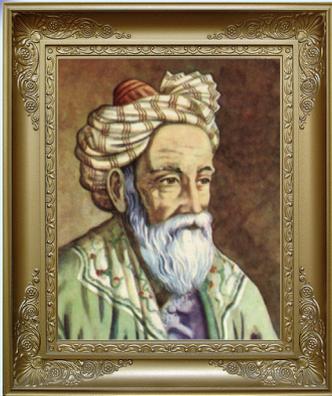


Pengalaman Belajar

1. Menyelesaikan persamaan kuadrat dan mengetahui karakteristik penyelesaiannya.
2. Menentukan grafik dari fungsi kuadrat.
3. Menentukan sumbu simetri dan nilai optimum.
4. Menentukan fungsi kuadrat.
5. Menjelaskan aplikasi dari fungsi kuadrat.

Peta Konsep





Sumber: <http://blog.yovisto.com>

Omar Khayyam

Omar Khayyam lahir 18 Mei 1048 di Nishapur di timur laut Iran. Pada usia muda ia pindah ke Samarkand dan memperoleh pendidikan di sana. Setelah itu ia pindah ke Bukhara dan berhasil menjadi matematikawan besar dan astronom dari periode abad pertengahan. Dia adalah penulis dari salah satu risalah yang paling penting pada aljabar dan ditulis sebelum zaman modern, *Treatise on Demonstrasi Masalah Aljabar*, yang mencakup metode geometris untuk memecahkan persamaan kubik dengan memotong sebuah hiperbola dengan lingkaran.

Omar Khayyam meneruskan tradisi aljabar al-Khawarizmi dengan memberikan persamaan sampai pangkat tiga. Seperti pendahulunya, Omar Khayyam melengkapi dengan persamaan kuadrat baik untuk solusi aritmatika maupun solusi geometri. Untuk persamaan-persamaan umum pangkat tiga dipercayainya bahwa solusi untuk aritmatika adalah tidak mungkin (kelak pada abad lima belas dibuktikan

bahwa pernyataan ini salah), sehingga dia hanya memberi solusi geometri.

Gambar kerucut yang dipotong untuk menyelesaikan persamaan pangkat dua sudah pernah dipakai oleh Menaechmus, Archimedes, dan Alhazen. Namun, Omar Khayyam mengambil cara lebih elegan dengan melakukan generalisasi metode guna mencakup persamaan-persamaan pangkat tiga dengan hasil berupa akar bilangan positif. Untuk persamaan dengan pangkat lebih dari tiga, Omar Khayyam tidak dapat memberi gambaran dengan menggunakan metode geometri yang sama. Dianggap bahwa tidak ada dimensi lebih dari tiga, “Apa yang disebut dengan kuadrat dikuadratkan oleh para ahli aljabar, memberi daya tarik dari sisi teoritis.”

Untuk lebih memudahkan uraian diberikan contoh persamaan: $x^3 + ax^2 + b^2x + c^3 = 0$, kemudian, dengan teknik substitusi, mengganti, $x^2 = 2py$ akan diperoleh $2pxy + 2apy + b^2x + c^3 = 0$. Hasilnya dari persamaan ini adalah hiperbola dan variabel untuk melakukan substitusi, $x^2 = 2py$, adalah parabola. Tampak jelas di sini bahwa hiperbola digambar bersama-sama dengan parabola pada (sistem) ordinat yang sama, sedangkan absis merupakan titik-titik perpotongan parabola dan hiperbola, adalah hasil akar persamaan kuadrat. Dia belum menjelaskan tentang koefisien negatif. Niatnya memecahkan problem berdasarkan parameter a, b, c adalah bilangan positif, negatif atau nol. Tidak semua akar dari persamaan kuadrat diketahui, karena dia tidak mengetahui akar bilangan negatif.

Sumber: <http://sejarahmatematika1.blogspot.co.id>, Wikipedia.

Hikmah yang bisa diambil

1. Kita harus terus berusaha untuk mencapai keberhasilan.
2. Kita harus mau dan mampu melakukan pembuktian-pembuktian tentang fenomena alam sekitar yang merupakan bukti kekuasaan Tuhan melalui keilmuan yang diketahui manusia.





Pertanyaan Penting

Bagaimana menentukan akar persamaan kuadrat dengan memfaktorkan, melengkapi kuadrat sempurna, dan rumus kuadrat? Bagaimana karakteristik dari penyelesaian persamaan kuadrat berdasarkan koefisien-koefisiennya?



Ayo Kita Gali Informasi

Dalam kehidupan sehari-hari, kita dapat menjumpai beberapa masalah yang terkait dengan persamaan kuadrat. Perhatikan masalah berikut.

“Johan dan Mario bekerja bersama-sama mengecat dinding dalam waktu 18 menit. Jika Johan bekerja sendirian, ia memerlukan waktu 15 menit lebih lama daripada waktu yang diperlukan Mario. Berapa waktu yang diperlukan Johan dan Mario masing-masing untuk mengecat dinding?”

Alternatif Penyelesaian:

Misal waktu yang diperlukan oleh Mario untuk mengecat dinding adalah t menit maka waktu yang diperlukan Johan adalah $t + 15$ menit. Sedangkan jika mereka melakukan bersama-sama maka waktu yang diperlukan adalah 18 menit. Sehingga didapatkan

Laju Mario mengecat adalah $\frac{1}{t}$.

Laju Johan mengecat adalah $\frac{1}{t+15}$.

Laju mengecat bersama-sama adalah $\frac{1}{18}$.

Dan pada akhirnya didapatkan:

Persamaan untuk menyelesaikan masalah ini adalah $\frac{1}{t} + \frac{1}{t+15} = \frac{1}{18}$.

Disederhanakan menjadi

$$\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t+15}\right)(18t)(t+15) = \left(\frac{1}{18}\right) \cdot 18t(t+15).$$

$$18t(t+15)\frac{1}{t} + 18t(t+15)\left(\frac{1}{t+15}\right) = t(t+15)$$



$$18(t + 15) + 18t = t(t + 15)$$

$$18t + 270 + 18t = t^2 + 15t$$

$$36t + 270 = t^2 + 15t$$

$$t^2 - 21t - 270 = 0$$

Persamaan $t^2 - 21t - 270 = 0$ merupakan salah satu contoh persamaan kuadrat dan untuk menyelesaikannya akan dibahas pada bagian ini. Secara umum persamaan kuadrat satu variabel adalah suatu persamaan yang pangkat tertingginya dua dan biasanya dituliskan sebagai $ax^2 + bx + c = 0$ dengan $a \neq 0$ dan $a, b, c \in R$. Bilangan a, b, c pada persamaan kuadrat tersebut disebut sebagai **koefisien**.

Akar-akar atau penyelesaian dari $ax^2 + bx + c = 0$ adalah nilai x yang memenuhi persamaan tersebut.

Cara menentukan akar persamaan kuadrat ada tiga, yaitu:

- (1) Memfaktorkan
- (2) Melengkapi Kuadrat Sempurna
- (3) Rumus Kuadrat (Rumus abc)

Untuk lebih jelasnya tentang akar persamaan kuadrat, ikutilah kegiatan belajar berikut.

Kegiatan 1

Menentukan Akar Persamaan Kuadrat dengan Memfaktorkan

Salah satu cara untuk menentukan akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ adalah dengan cara memfaktorkan. Sekarang coba kalian perhatikan kembali perkalian bentuk aljabar berikut.



Ayo Kita Gali Informasi

$x(x + 2) = x^2 + 2x$	$(x + 1)(x + 4) = (x + 1)(x + 4)$ $= x^2 + 4x + x + 4$ $= x^2 + 5x + 4$	$(3x - 4)(x + 3) = (3x - 4)(x + 3)$ $= 3x^2 + 9x - 4x - 12$ $= 3x^2 + 5x - 12$
atau	atau	atau
$x^2 + 2x = x(x + 2)$	$(x + 1)(x + 4) = x^2 + 5x + 4$	$(3x - 4)(x + 3) = 3x^2 + 5x - 12$
<i>Bagaimana, jika sebaliknya (dari kanan ke kiri)?</i>		

$x^2 + 2x = x(x + 2)$	$x^2 + 5x + 4 = (x + 1)(x + 4)$	$3x^2 + 5x - 12 = (3x - 4)(x + 3)$
Bentuk seperti ini disebut dengan "Memfaktorkan"		

Dengan memfaktorkan persamaan kuadrat, dapat ditentukan akar-akarnya yaitu

$$x^2 + 5x + 4 = 0$$

$$(x + 1)(x + 4) = 0$$

$$x + 1 = 0 \text{ atau } x + 4 = 0$$

$$x = -1 \text{ atau } x = -4$$

Jadi akar-akarnya adalah -1 dan -4 .



Ayo Kita Amati

Tahap inti dari metode ini adalah memfaktorkan persamaan kuadrat $x^2 + bx + c$ menjadi $(x + p)(x + q)$ atau bisa dituliskan

$$x^2 + bx + c = (x + p)(x + q)$$

$$x^2 + bx + c = x^2 + (\dots + \dots)x + (\dots \times \dots)$$

Jadi, untuk memfaktorkan harus dicari bilangan p dan q sedemikian hingga $b = \dots + \dots$ dan $c = \dots \times \dots$

Berdasarkan pengamatanmu, maka lakukan pemfaktoran berikut dan tentukan akar-akarnya.



Ayo Kita Mencoba

- Persamaan kuadrat : $x^2 + 5x + 6 = 0$

Didapat $b = 5$ dan $c = 6$, sehingga harus dicari bilangan p dan q sedemikian hingga $p + q = 5$ dan $pq = 6$. Dalam hal ini dilihat syarat $pq = 6$ terlebih dahulu, sehingga pasangan nilai p dan q yang mungkin adalah

p	q	pq	$p + q$
1	6	6	7
2	3	6	5
3	...	6	...
6	...	6	...
-1	...	6	...
-2	...	6	...
-3	...	6	...
-6	...	6	...

Kemudian karena juga harus memenuhi $p + q = 5$, maka berdasarkan tabel pada baris kedua didapat $p = \dots$ dan $q = \dots$ atau berdasarkan pada baris ketiga dituliskan $p = \dots$ dan $q = \dots$ (dua hasil ini merupakan hasil yang sama). Sehingga didapat pemfaktornya

$$x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$$

Dengan demikian akar-akarnya adalah $x = \dots$ dan $x = \dots$

- Persamaan kuadrat : $x^2 + x - 6 = 0$

Didapat $b = 1$ dan $c = -6$, sehingga harus dicari bilangan p dan q sedemikian hingga $p + q = 1$ dan $pq = -6$. Dalam hal ini dilihat syarat $pq = -6$ terlebih dahulu, sehingga pasangan nilai p dan q yang mungkin adalah:

p	q	pq	$p + q$
1	...	-6	...
2	...	-6	...
3	...	-6	...
6	...	-6	...
-1	...	-6	...
-2	...	-6	...
-3	...	-6	...
-6	...	-6	...

Kemudian karena juga harus memenuhi $p + q = 1$, maka berdasarkan tabel di atas pada baris ketiga didapat $p = \dots$ dan $q = \dots$ atau berdasarkan pada baris keenam dituliskan $p = \dots$ dan $q = \dots$ (dua hasil ini merupakan hasil yang sama). Sehingga didapat pemfaktornya

$$x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2)$$

Dengan demikian, akar-akarnya adalah $x = \dots$ dan $x = \dots$

- Persamaan kuadrat : $x^2 - x - 6 = 0$

Didapat $b = -1$ dan $c = -6$, sehingga harus dicari bilangan p dan q sedemikian hingga $p + q = -1$ dan $pq = -6$. Dalam hal ini dilihat syarat $pq = -6$ terlebih dahulu, sehingga pasangan nilai p dan q yang mungkin adalah

p	q	pq	$p + q$
1	...	-6	...
2	...	-6	...
3	...	-6	...
6	...	-6	...
-1	...	-6	...
-2	...	-6	...
-3	...	-6	...
-6	...	-6	...

Kemudian karena juga harus memenuhi $p + q = -1$, maka berdasarkan tabel tersebut pada baris kedua didapat $p = \dots$ dan $q = \dots$ atau berdasarkan pada baris ketujuh dituliskan $p = \dots$ dan $q = \dots$ (dua hasil ini merupakan hasil yang sama). Sehingga didapat pemfaktornya

$$x^2 - x - 6 = (x + 2)(x - 3)$$

Dengan demikian, akar-akarnya adalah $x = \dots$ dan $x = \dots$



**Ayo Kita
Menalar**

Dengan melakukan kegiatan di atas anda dapat melakukan pemfaktoran dan menyelesaikan persamaan kuadrat. Bagaimana kalau persamaan kuadratnya adalah $x^2 + 2x - 1 = 0$? Bisakah anda menyelesaikannya dengan metode pemfaktoran? Mengapa?



Bagaimana kalau persamaan kuadratnya adalah $2x^2 - 2x - 12 = 0$? Bisakah anda menyelesaikannya dengan metode pemfaktoran? Jelaskan? (Petunjuk: uraikan terlebih dahulu $2x^2 - 2x - 12$ menjadi $2(x^2 - x - 6)$). Tuliskan langkah-langkah menentukan akar-akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ dengan menggunakan metode pemfaktoran.

Jumlahan dan Hasil Kali Akar-akar dari Persamaan Kuadrat

Pada langkah penyelesaian persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ (bisa ditulis $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$) menggunakan pemfaktoran harus ditentukan p dan q sedemikian hingga memenuhi

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = (x + p)(x + q)$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = x^2 + (p + q)x + (p \times q)$$

Dengan cara ini didapatkan penyelesaiannya adalah $x_1 = -p$ dan $x_2 = -q$ sehingga $x_1 + x_2 = -p - q = -(p + q) = -\frac{b}{a}$ dan $x_1 \cdot x_2 = (-p)(-q) = pq = \frac{c}{a}$. Dari uraian ini didapat rumus untuk menentukan jumlah dan hasil kali persamaan kuadrat.



**Ayo Kita
Menanya**

Terkait dengan fokus perhatian di atas, buatlah suatu persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ dengan a , b , dan c tertentu (kalian tentukan sendiri). Dan tanyakan pada teman sebangkumu apakah persamaan yang kamu buat tersebut dapat diselesaikan dengan metode di atas? Jika bisa selesaikan.

Kegiatan 2

Menentukan Akar Persamaan Kuadrat dengan Melengkapkan Kuadrat Sempurna

Selain menentukan akar persamaan dengan cara memfaktorkan, kalian dapat memperluas teknik penyelesaian persamaan kuadrat dengan cara melengkapkan kuadrat sempurna. Sebelum mempelajari lebih lanjut, kalian perlu mengenal terlebih dahulu tentang sifat akar.





Ayo Kita Amati

1. Akar persamaan kuadrat $x^2 = 4$

Dengan mudah dapat dihitung bahwa persamaan kuadrat $x^2 = 4$ mempunyai akar-akar $x = \sqrt{4}$ atau $x = -\sqrt{4}$ dan dapat disederhanakan menjadi $x = 2$ atau $x = -2$.

Berdasarkan contoh di atas dapat disimpulkan bahwa

Jika $x^2 = k$, dengan k suatu bilangan tak negatif maka $x = \dots$ atau $x = -\dots$

2. Akar persamaan $(x + 5)^2 = 16$

Sesuai sifat akar kuadrat maka diperoleh $x + 5 = \pm 4$. Sehingga, $x = \pm 4 - 5$ yang menunjukkan ada dua akar, yaitu

$$x = 4 - 5 \text{ atau } x = -4 - 5$$

$$x = -1 \text{ atau } x = -9$$

Jika $(x + a)^2 = k$, dengan k suatu bilangan taknegatif dan a bilangan real, maka $x = -a + \dots$ atau $x = -a - \dots$

Pada “Ayo Kita Amati” bagian 1 dan 2 di atas dinamakan sebagai bentuk kuadrat sempurna atau secara umum dituliskan sebagai $(x + p)^2 + q = 0$.

Metode yang telah kalian pelajari pada Kegiatan 1 relatif mudah untuk diterapkan. Akan tetapi tidak semua persamaan kuadrat dapat diselesaikan secara langsung menggunakan metode tersebut. Sehingga kita harus mengembangkan metode penyelesaian persamaan kuadrat yang lain. Bagaimana jika ada soal-soal persamaan kuadrat seperti berikut?

Tentukan akar persamaan kuadrat berikut dengan membentuk kuadrat sempurna terlebih dahulu.

1. $x^2 - 5 = 0$
2. $x^2 + 10x + 24 = 0$
3. $x^2 - 8 = 0$
4. $x^2 + 5x + 3 = 0$
5. $x^2 - 37 = 0$
6. $2x^2 + 7x + 3 = 0$

Untuk menyelesaikan masalah di atas, ayo amati kegiatan berikut.





Ayo Kita Gali Informasi

Tahap inti dari metode ini adalah memfaktorkan persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ menjadi bentuk kuadrat sempurna $(x + p)^2 + q = 0$ (jika diuraikan menjadi $x^2 + 2px + p^2 + q = 0$).

Untuk bentuk kuadrat sempurna, koefisien dari x^2 adalah 1 maka persamaan kuadrat yang akan diselesaikan ($ax^2 + bx + c = 0$) harus dibagi ... supaya koefisien dari x^2 juga 1. Sehingga didapat persamaan kuadrat baru yang ingin diselesaikan adalah $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$. Langkah berikutnya adalah mencari nilai p dan q sedemikian hingga memenuhi

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = (x + p)^2 + q$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = x^2 + 2px + p^2 + q$$

Jadi untuk membentuk kuadrat sempurna harus dicari bilangan p dan q sedemikian hingga $\frac{b}{a} = 2p$ dan $\frac{c}{a} = \dots + \dots$ atau lebih sederhana didapatkan $p = \frac{b}{2a}$ dan $q = \frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2$.



Ayo Kita Mencoba

- Persamaan kuadrat : $x^2 + 5x + 6 = 0$

Didapat $b = 5$ dan $c = 6$, sehingga harus dicari bilangan p dan q sedemikian hingga $\frac{b}{a} = \dots$ dan $\frac{c}{a} = \dots + \dots$ Dalam hal ini didapat $p = \dots$ dan $q = \dots$ sehingga bisa dituliskan

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

$$(x + p)^2 + q = 0$$

$$(x + \dots)^2 + \dots = 0$$

$$(x + \dots)^2 = \dots$$



$$x + \dots = \pm \dots$$

$$x = \dots \pm \dots$$

- Persamaan kuadrat : $x^2 + x - 6 = 0$

Didapat $b = 1$ dan $c = -6$, sehingga harus dicari bilangan p dan q sedemikian hingga $\frac{b}{a} = \dots$ dan $\frac{c}{a} = \dots + \dots$. Dalam hal ini didapat $p = \dots$ dan $q = \dots$ sehingga bisa dituliskan

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$(x + p)^2 + q = 0$$

$$(x + \dots)^2 + \dots = 0$$

$$(x + \dots)^2 = \dots$$

$$x + \dots = \pm \dots$$

$$x = \dots \pm \dots$$

- Persamaan kuadrat : $x^2 - x - 6 = 0$

Didapat $b = -1$ dan $c = -6$, sehingga harus dicari bilangan p dan q sedemikian hingga $\frac{b}{a} = \dots$ dan $\frac{c}{a} = \dots + \dots$. Dalam hal ini didapat $p = \dots$ dan $q = \dots$ sehingga bisa dituliskan

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$(x + p)^2 + q = 0$$

$$(x + \dots)^2 + \dots = 0$$

$$(x + \dots)^2 = \dots$$

$$x + \dots = \pm \dots$$

$$x = \dots \pm \dots$$



**Ayo Kita
Menanya**

Terkait dengan fokus perhatian di atas, buatlah suatu persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ dengan a , b , dan c tertentu (kalian tentukan sendiri). Lalu, tanyakan pada teman sebangkumu apakah persamaan yang kamu buat tersebut dapat diselesaikan dengan metode di atas? Jika bisa, selesaikan.



Misal: Jika terdapat persamaan kuadrat $x^2 - 5x + 7 = 1$.

“Manakah cara yang paling mudah untuk menentukan nilai dari persamaan kuadrat? Dengan menggunakan cara memfaktoran atau dengan cara melengkapi kuadrat sempurna?”



**Ayo Kita
Menalar**

Penurunan rumus kuadrat/rumus abc

Pada bagian sebelumnya persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ (ekivalen dengan persamaan $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$) dapat diselesaikan dengan membentuk kuadrat sempurna $(x + p)^2 + q = 0$ dengan $p = \frac{b}{2a}$ dan $q = \frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2$ sehingga didapat akar-akar persamaan kuadrat yaitu

$$(x + p)^2 + q = 0$$

$$(x + p)^2 = -...$$

$$x + p = \pm ...$$

$$x = -... \pm ...$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - \dots c}{4a^2}} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - \dots c}}{\sqrt{4a^2}} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - \dots c}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Berdasarkan uraian di atas didapat rumus untuk mendapatkan akar-akar persamaan kuadrat atau biasanya disebut sebagai **rumus kuadrat/rumus abc** yaitu

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Dan nilai di dalam akar disebut sebagai diskriminan (D) yaitu

$$D = b^2 - 4ac$$

Nilai diskriminan ini mempengaruhi penyelesaian/akar-akar dari persamaan kuadrat. Untuk memahami hal ini lakukan pengamatan berikut.



Ayo Kita Amati

Berdasarkan hasil pengamatan dan informasi yang kalian dapatkan, gunakan nalar kalian untuk menentukan hubungan antara diskriminan dengan jenis-jenis akar selesaian persamaan kuadrat. Ayo perhatikan dan lengkapi tabel berikut.

Persamaan Kuadrat	Diskriminan	Selesaian
$x^2 + 5x + 6 = 0$	1	$\{-2, -3\}$
$2x^2 - 5x - 3 = 0$
$x^2 + 2x + 1 = 0$	0	$\{-1\}$
$x^2 - 4 = 0$...	$\{2, -2\}$
$9x^2 - 6x + 1 = 0$	0	...
$x^2 + x + 1 = 0$	-3	$\{ \}$ (tidak punya akar-akar)
$2x^2 + 2x + 1 = 0$



Ayo Kita Simpulkan

Berdasarkan hasil pengamatan pada tabel di atas dengan mengetahui diskriminan maka akar-akar dari persamaan kuadrat dibagi menjadi tiga kategori yaitu akar-akarnya kembar, akar-akarnya berbeda, dan tidak mempunyai akar-akar

- Untuk $D > 0$ maka akar-akarnya ...
- Untuk $D = 0$ maka akar-akarnya ...
- Untuk $D < 0$ maka akar-akarnya ...

Kegiatan 3

Penerapan Persamaan Kuadrat dalam Masalah Nyata

Kalian telah mempelajari tentang persamaan kuadrat. Coba aplikasikan persamaan kuadrat tersebut untuk menyelesaikan masalah sehari-hari.



Ayo Kita Amati

Luas sebidang tanah berbentuk persegi panjang adalah 4.320 m^2 . Panjang tanah itu 12 m lebih panjang daripada lebarnya. Berapakah panjang dan lebar sebidang tanah tersebut?

Alternatif Pemecahan Masalah

Misalnya panjang tanah = p meter

lebar tanah = x meter

maka $p = (12 + x)$ meter

Luas tanah = ... p

... = ... p

... = ... $(12 + x)$

$$x^2 + 12x - 4.320 = 0$$

selesaikan dengan metode yang sudah dibahas sehingga didapat

$$x_1 = \dots \quad \text{atau} \quad x_2 = \dots$$

Karena ukuran panjang pada sebidang tanah tidak pernah negatif, maka x yang memenuhi adalah $x = \dots$

Untuk $x = \dots$ maka panjang tanah adalah $x + 12 = \dots$

Jadi, panjang sebidang tanah tersebut adalah ... meter dan lebarnya adalah ... meter.

Materi Esensi 2.1

Persamaan Kuadrat

Persamaan kuadrat satu variabel adalah suatu persamaan yang pangkat tertingginya dua. Secara umum, bentuk persamaan kuadrat adalah $ax^2 + bx + c = 0$ dengan $a \neq 0$, $a, b, c \in \mathbf{R}$. Konstanta a, b, c pada persamaan ini disebut sebagai koefisien. Beberapa contoh persamaan kuadrat yaitu: $3x^2 - 7x + 5 = 0$, $x^2 - x + 12 = 0$, $x^2 - 9 = 0$, $2x(x - 7) = 0$ dan lainnya.



Akar persamaan kuadrat dari $ax^2 + bx + c = 0$ adalah nilai x yang memenuhi persamaan tersebut. Cara menentukan akar persamaan kuadrat ada tiga cara, yaitu:

- (1) Memfaktorkan
- (2) Melengkapi Kuadrat Sempurna
- (3) Rumus Kuadrat (Rumus abc)

Dalam hal ini rumus kuadrat (Rumus abc) adalah

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Karakteristik dari akar-akar persamaan kuadrat dapat dilihat dari koefisien persamaannya. Berikut karakteristik-karakteristik dari persamaan kuadrat berdasarkan koefisien-koefisien persamaan kuadratnya:

- Jika x_1 dan x_2 merupakan akar-akar dari persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ maka $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ dan $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.
- Misal suatu persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ dengan nilai diskriminannya adalah $D = b^2 - 4ac$ maka untuk $D < 0$ persamaan kuadrat tidak mempunyai akar-akar, $D = 0$ persamaan kuadrat mempunyai akar-akar kembar, $D > 0$ persamaan kuadrat mempunyai dua akar berbeda.

Contoh 1

Menentukan Akar Persamaan Kuadrat dengan Memfaktorkan

Tentukan akar-akar penyelesaian dari bentuk $x^2 - 15x + 14 = 0$.

Alternatif Penyelesaian:

Langkah 1:

Carilah dua bilangan yang merupakan faktor dari 14 dan jika dijumlah sama dengan -15 .

Misalkan dua bilangan tersebut adalah p dan q , maka $pq = 14$ dan $p + q = -15$

P	q	$p + q$	pq
1	14	15	14
2	7	9	14

P	Q	$p + q$	Pq
-1	-14	-15	14
-2	-7	-9	14

Dengan demikian bilangan yang memenuhi nilai $p = -1$ dan $q = -14$



Langkah 2:

Sehingga bentuk $x^2 - 15x + 14 = 0$ dapat difaktorkan menjadi

$$x^2 - 15x + 14 = 0$$

$$(x - 1)(x - 14) = 0$$

$$x - 1 = 0 \text{ atau } x - 14 = 0$$

$$x_1 = 1 \text{ atau } x_2 = 14$$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{1, 14\}$

Contoh 2**Menentukan Akar Persamaan Kuadrat dengan Melengkapi Kuadrat Sempurna**

Tentukan akar-akar penyelesaian dari bentuk $2x^2 + 7x + 3$.

Alternatif Penyelesaian:

$$2x^2 + 7x + 3 = 0$$

$$2x^2 + 7x = -3$$

$$x^2 + \frac{7}{2}x = -\frac{3}{2}$$

$$x^2 + \frac{7}{2}x + \left(\frac{7}{4}\right)^2 = -\frac{3}{2} + \frac{49}{16}$$

$$\left(x + \frac{7}{4}\right)^2 = \frac{-24 + 49}{16}$$

$$\left(x + \frac{7}{4}\right)^2 = \frac{25}{16}$$

$$\left(x + \frac{7}{4}\right) = \pm \sqrt{\frac{25}{16}}$$

$$x + \frac{7}{4} = \pm \frac{5}{4}$$

$$x_1 = -\frac{7}{4} + \frac{5}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$x_2 = -\frac{7}{4} - \frac{5}{4} = -3$$

$$x_1 = -\frac{1}{2} \text{ atau } x_2 = -3$$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{-\frac{1}{2}, -3\}$



Contoh 3**Menentukan Akar Persamaan Kuadrat dengan Rumus Kuadratik (Rumus ABC)**

Tentukan akar-akar penyelesaian dari bentuk $2x^2 + 7x + 3$.

Alternatif Penyelesaian:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{2 \cdot 2} = \frac{-7 \pm 5}{4}$$

Jadi $x_1 = -\frac{1}{2}$ dan $x_2 = -3$.

Contoh 4**Aplikasi Persamaan Kuadrat**

Sumber: <https://repeobliek.files.wordpress.com>

Keliling suatu taman kota yang berbentuk persegi panjang adalah 90 m. Jika luas taman 450 m², berapa panjang dan lebarnya?

Alternatif Pemecahan Masalah

Misalkan panjang = p

panjang + lebar = $\frac{1}{2}$ keliling

lebar = $45 - p$

Persamaan : panjang \times lebar = luas

$$p(45 - p) = 450$$

$$45p - p^2 = 450$$

$$p^2 - 45p + 450 = 0$$

$$(p - 15)(p - 30) = 0$$

$$p - 15 = 0 \text{ atau } p - 30 = 0$$

$$p = 15 \qquad p = 30$$

Untuk $p = 15$, maka lebar adalah $45 - 15 = 30$

Untuk $p = 30$, maka lebar adalah $45 - 30 = 15$

Jadi panjang dan lebar taman kota adalah 30 m dan 15 m.



**Ayo Kita
Tinjau Ulang**

1. Persamaan kuadrat $x^2 - 5x + 6 = 0$ mempunyai akar-akar x_1 dan x_2 . Tentukan persamaan kuadrat baru yang akar-akarnya $x_1 - 3$ dan $x_2 - 3$.
2. Dengan cara melengkapi kuadrat sempurna tentukan akar-akar penyelesaian dari bentuk $x^2 + 7x + 3$.
3. Dengan cara menggunakan rumus kuadratik tentukan akar-akar penyelesaian dari bentuk $x^2 + 7x + 3$.
4. Keliling suatu taman kota yang berbentuk persegi panjang adalah 100 m. Jika luas taman 400 m^2 , berapa panjang dan lebarnya?

Latihan 2.1

Persamaan Kuadrat

1. Tentukan akar persamaan berikut.
 - a. $3x^2 - 12 = 0$
 - b. $x^2 + 7x + 6 = 0$
 - c. $-3x^2 - 5x + 2 = 0$
2. Nyatakan persamaan $3(x^2 + 1) = x(x - 3)$ dalam bentuk umum persamaan kuadrat.
3. Akar-akar persamaan $3x^2 - 12x + 2 = 0$ adalah α dan β . Tentukan persamaan kuadrat baru yang akar-akarnya $(\alpha + 2)$ dan $(\beta + 2)$.
4. Tentukan akar persamaan kuadrat berikut dengan 3 cara yang telah kalian pelajari.
 - a. $x^2 - 1 = 0$
 - b. $4x^2 + 4x + 1 = 0$
 - c. $-3x^2 - 5x + 2 = 0$
 - d. $2x^2 - x - 3 = 0$
 - e. $x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$
5. Tentukan nilai diskriminan persamaan pada soal no. 1.
6. Jika nilai diskriminan persamaan kuadrat $3x^2 - 5x + c = 0$ adalah 49, tentukan nilai c .

7. Ubahlah persamaan $3x^2 = 2x - 4$ kedalam bentuk umum persamaan kuadrat.
8. Carilah himpunan penyelesaian dari persamaan kuadrat berikut.
 - a. $x^2 - 5x + 6 = 0$
 - b. $x^2 + 2x - 15 = 0$
 - c. $x^2 + 4x - 12 = 0$
9. Bagaimana bentuk persamaan kuadrat yang akar-akarnya 2 dan 5?
10. Nyatakan persamaan $2(x^2 + 1) = x(x + 3)$ dalam bentuk umum persamaan kuadrat.

2.2

Grafik Fungsi Kuadrat



Pertanyaan Penting

Fungsi kuadrat adalah fungsi yang berbentuk $y = ax^2 + bx + c$, dengan $a \neq 0$, $x, y \in \mathbb{R}$. Fungsi kuadrat dapat pula dituliskan sebagai $f(x) = ax^2 + bx + c$. Bagaimanakah cara menggambar fungsi kuadrat pada bidang kartesius? Apa pengaruh nilai a , b dan c terhadap grafik fungsi kuadrat?

Kegiatan 1

Menggambar Grafik Fungsi $y = ax^2$

Gambarlah grafik fungsi kuadrat yang paling sederhana, yakni ketika $b = c = 0$. Untuk mendapatkan grafiknya kamu dapat membuat gambar untuk beberapa nilai x dan mensubstitusikannya pada fungsi $y = ax^2$, misalkan untuk $a = 1$, $a = -1$ dan $a = 2$.

Kerjakan kegiatan ini dengan teman sebangkumu.



Ayo Kita Gali Informasi

Untuk mendapatkan grafik suatu fungsi kuadrat, kamu terlebih dahulu harus mendapatkan beberapa titik koordinat yang dilalui oleh fungsi kuadrat tersebut. Kamu dapat mencari titik koordinat tersebut dengan mensubstitusikan untuk beberapa nilai x yang berbeda.



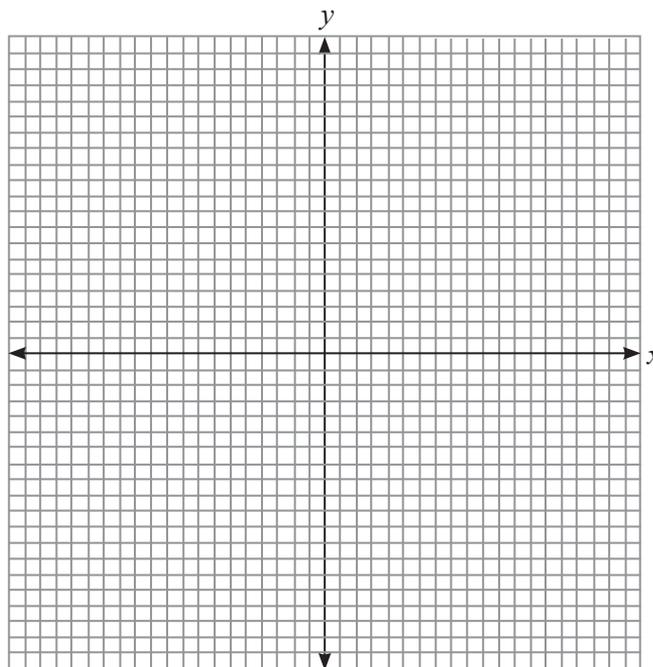
a. Lengkapi ketiga tabel berikut.

x	$y = x^2$	(x, y)	x	$y = -x^2$	(x, y)	x	$y = 2x^2$	(x, y)
-3	$(-3)^2 = 9$	$(-3, 9)$	-3	$-(-3)^2 = -9$	$(-3, -9)$	-3	$2(-3)^2 = 18$	
-2			-2			-2		
-1			-1			-1		
0			0			0		
1			1			1		
2			2			2		
3			3			3		

b. Tempatkan titik-titik koordinat berada dalam tabel di atas pada bidang koordinat. (gunakan tiga warna berbeda).

c. Sketsa grafik dengan menghubungkan titik-titik koordinat tersebut (sesuai warna).

Keterangan: Gambarkan ketiga grafik tersebut menggunakan bidang koordinat di bawah ini dan amati tiap-tiap grafik.





Ayo Kita Amati

Berdasarkan hasil pengamatan menggambar grafik maka didapatkan informasi berikut.

Grafik $y = x^2$ berupa parabola yang terbuka ke-...

Grafik $y = -x^2$ berupa parabola yang terbuka ke-...

Grafik $y = 2x^2$ berupa parabola yang terbuka ke-...

Grafik $y = x^2$ dan $y = 2x^2$ sama-sama parabola yang terbuka ke-... dan perbedaannya adalah grafik $y = x^2$ lebih ... daripada grafik $y = 2x^2$.



Ayo Kita Simpulkan

Berdasarkan Kegiatan 1, kesimpulan apa yang kamu peroleh?

Nilai a pada fungsi $y = ax^2$ akan mempengaruhi bentuk grafiknya.

1. Jika $a > 0$ maka ...
2. Jika $a < 0$ maka ...
3. Jika $a > 0$ dan nilai a makin besar maka ...
4. Jika $a < 0$ dan nilai a makin kecil maka ...



Ayo Kita Menanya

Buatlah suatu fungsi kuadrat dan tanyakan kepada teman sebangkumu, “Apakah grafik dari fungsi kuadrat tersebut terbuka ke atas atau ke bawah? Jelaskan.”

Kegiatan 2

Menggambar Grafik Fungsi $y = x^2 + c$

Pada kegiatan ini kamu akan menggambar grafik fungsi kuadrat ketika $b = 0$ dan $c \neq 0$. Kegiatan ini dibagi menjadi dua subkegiatan. Pada kegiatan ini kamu menggambar grafik fungsi $y = x^2 + c$ sebanyak dua kali, yakni untuk $c = 1$ dan $c = -1$.





Ayo Kita Gali Informasi

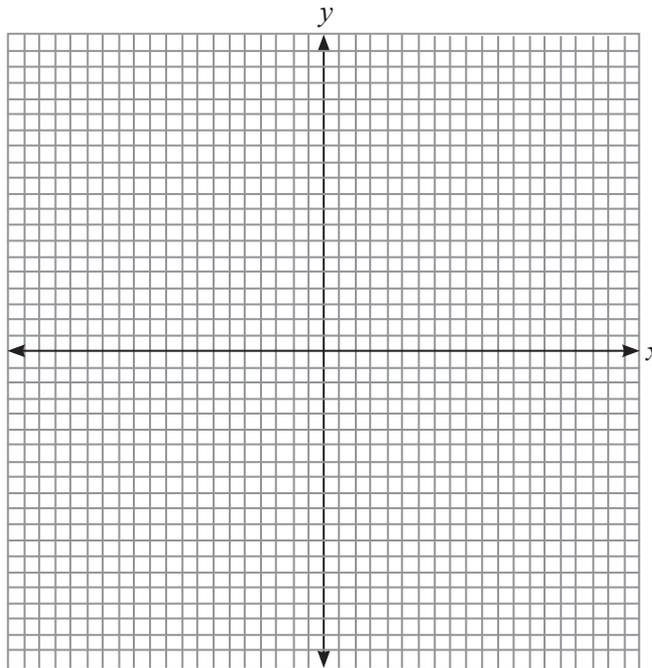
a. Lengkapi ketiga tabel berikut.

x	$y = x^2 + 1$	(x, y)
-3	$(-3)^2 + 1 = 10$	$(-3, -9)$
-2		
-1		
0		
1		
2		
3		

x	$y = x^2 - 1$	(x, y)
-3	$(-3)^2 - 1 = 8$	$(-3, 8)$
-2		
-1		
0		
1		
2		
3		

- b. Tempatkan titik-titik koordinat dalam tabel di atas pada bidang koordinat.
- c. Sketsa grafik dengan menghubungkan titik-titik koordinat tersebut (sesuai warna).
- d. Gambarkan kembali grafik $y = x^2$ seperti pada Kegiatan 1.

Keterangan: Gambarkan ketiga grafik tersebut menggunakan bidang koordinat di bawah ini dan amati tiap-tiap grafik.





Ayo Kita Amati

Berdasarkan hasil pengamatanmu, lengkapi kalimat-kalimat berikut.

- Grafik fungsi $y = x^2$ memotong sumbu- y di titik koordinat (... , ...).
- Grafik fungsi $y = x^2 + 1$ memotong sumbu- y di titik koordinat (... , ...).
- Grafik fungsi $y = x^2 - 1$ memotong sumbu- y di titik koordinat (... , ...).
- Grafik fungsi $y = x^2 + 1$ merupakan geseran grafik $y = x^2$ sebesar ... satuan ke ...
- Grafik fungsi $y = x^2 - 1$ merupakan geseran grafik $y = x^2$ sebesar ... satuan ke ...



Ayo Kita Simpulkan

- Untuk c positif, grafik fungsi $y = x^2 + c$ merupakan geseran grafik $y = x^2$ sebesar satuan ke
- Untuk c negatif, grafik fungsi $y = x^2 + c$ merupakan geseran grafik $y = x^2$ sebesar satuan ke
- Grafik fungsi $y = x^2 + c$ memotong sumbu- y di titik koordinat (..... ,



Ayo Kita Menanya

Buatlah dua fungsi kuadrat dengan nilai c berbeda tapi a dan b sama. Tanyakan kepada teman sebangkumu, “Jelaskan pergeseran yang terjadi antara dua grafik dari fungsi-fungsi tersebut.”

Kegiatan 3

Menggambar Grafik Fungsi $y = x^2 + bx$

Pada kegiatan ini kamu akan menggambar grafik fungsi kuadrat ketika $c = 0$ dan $b \neq 0$. Kegiatan ini dibagi menjadi tiga subkegiatan, yakni ketika $b = 1$, $b = -1$ dan $b = 2$. Pada kegiatan ini kamu akan mengenal titik puncak dari suatu grafik fungsi kuadrat.





**Ayo Kita Gali
Informasi**

Kerjakan kegiatan ini bersama teman sebangkumu.

a. Lengkapi keempat tabel berikut.

x	$y = x^2 + 2x$	(x, y)
-3	$(-3)^2 + 2(-3) = 3$	$(-3, 3)$
-2		
-1		
0		
1		
2		
3		

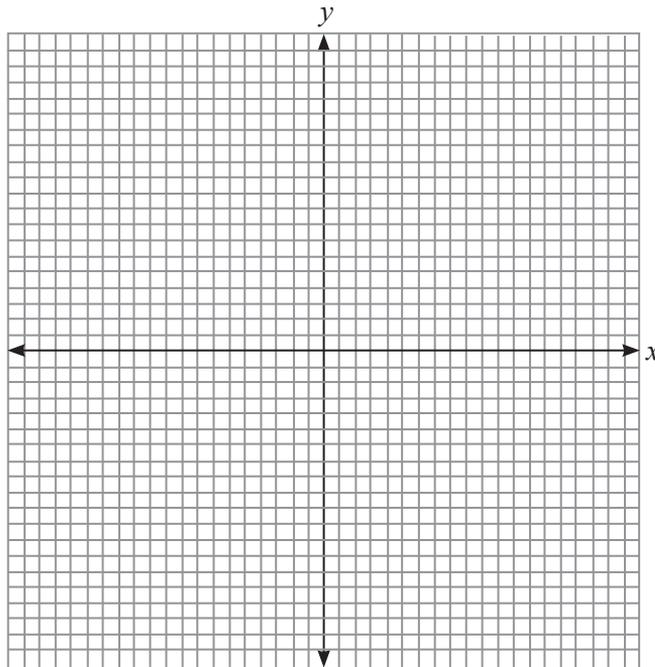
x	$y = x^2 - 2x$	(x, y)
-3	$(-3)^2 - 2(-3) = 15$	$(-3, 15)$
-2		
-1		
0		
1		
2		
3		

x	$y = -x^2 + 2x$	(x, y)
-3	$-(-3)^2 + 2(-3) = -15$	$(-3, -15)$
-2		
-1		
0		
1		
2		
3		

x	$y = -x^2 - 2x$	(x, y)
-3	$-(-3)^2 - 2(-3) = -3$	$(-3, -3)$
-2		
-1		
0		
1		
2		
3		

- b. Tempatkan titik-titik koordinat dalam tabel pada bidang koordinat (gunakan empat warna berbeda untuk tabel).
- c. Sketsa grafik dengan menghubungkan titik-titik koordinat tersebut (sesuai warna).

Keterangan: Gambarkan keempat grafik tersebut menggunakan bidang koordinat di bawah ini dan amati tiap-tiap grafik. Pada tiap-tiap grafik tentukan koordinat titik yang paling bawah (titik koordinat ini selanjutnya disebut titik puncak).



Ayo Kita Amati

- d. Pada dua tabel pertama tentukan nilai y yang paling kecil. Perhatikan hubungan antara nilai b dengan nilai y yang paling kecil dari tiap tabel tersebut. Apa yang saudara dapatkan?
- e. Pada dua tabel terakhir tentukan nilai y yang paling besar. Perhatikan hubungan antara nilai b dengan nilai y yang paling besar dari tiap tabel tersebut. Apa yang saudara dapatkan?
- f. Ulangi kegiatan ini dengan fungsi kuadrat $y = -x^2 + x$, $y = -x^2 - x$. Selanjutnya tentukan titik yang paling atas (titik koordinat ini juga disebut dengan titik puncak).

Nilai y yang paling kecil (untuk $a > 0$) dan y yang paling besar (untuk $a < 0$) dinamakan nilai optimum (y_p) dan jika x_p yang menyebabkan nilai y optimum maka (x_p, y_p) dinamakan titik puncak atau titik optimum. Pembahasan mengenai nilai optimum ini akan dijelaskan lebih lanjut pada subbab selanjutnya.





Ayo Kita Simpulkan

Untuk $y = x^2 + bx$ maka nilai optimumnya adalah ... dan $y = -x^2 + bx$ maka nilai optimumnya adalah ...



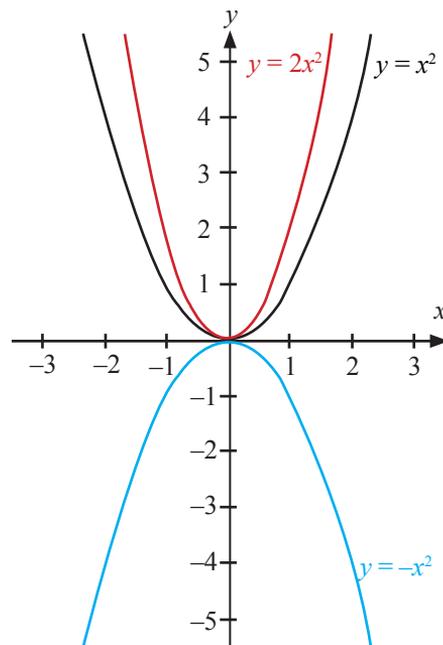
Ayo Kita Menanya

Buatlah fungsi kuadrat yang berbentuk $y = x^2 + bx$ dan tanyakan pada teman sebangkumu berapa nilai optimumnya.

Materi Esensi 2.2

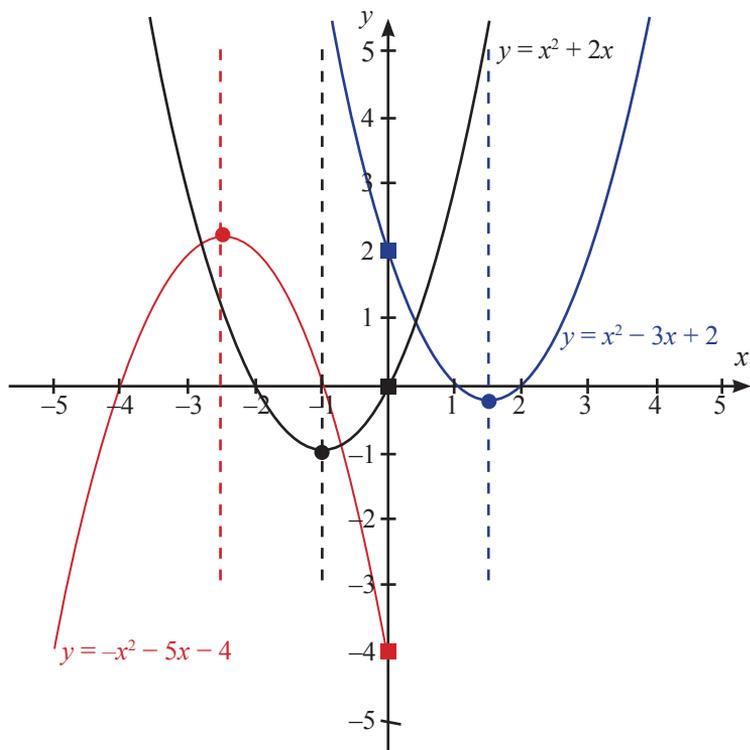
Grafik Fungsi Kuadrat

Fungsi kuadrat merupakan fungsi yang berbentuk $y = ax^2 + bx + c$, dengan $a \neq 0$. Grafik dari fungsi kuadrat menyerupai parabola, sehingga dapat dikatakan juga sebagai fungsi parabola.



Gambar Perbandingan Grafik fungsi kuadrat $y = x^2$, $y = -x^2$ dan $y = 2x^2$

Nilai a pada fungsi $y = ax^2 + bx + c$ akan mempengaruhi bentuk grafiknya. Jika a positif maka grafiknya akan terbuka ke atas. Sebaliknya jika a negatif maka grafiknya akan terbuka ke bawah. Jika nilai a semakin besar maka grafiknya menjadi lebih “kurus”.



Gambar Perbandingan grafik fungsi kuadrat $y = x^2 + 2x$, $y = x^2 - 3x + 2$ dan $y = -x^2 - 5x - 4$

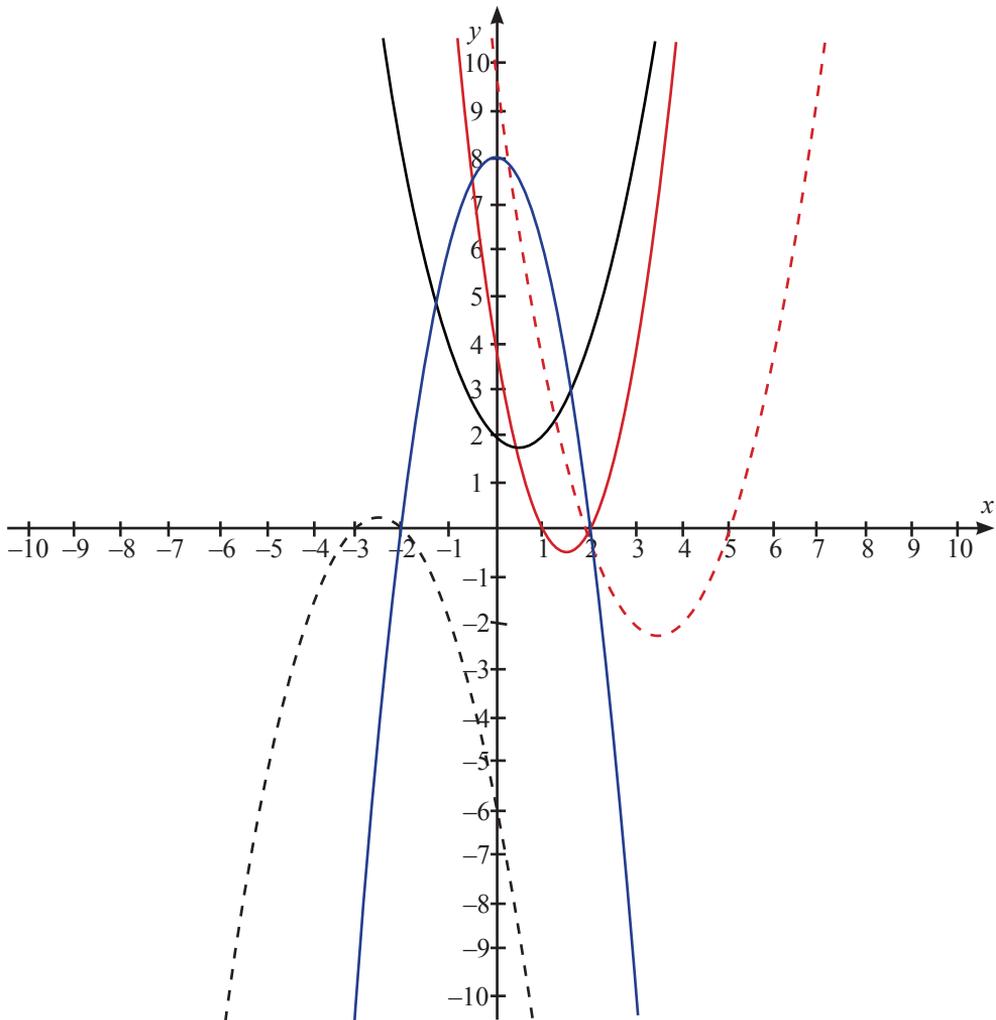
Garis putus-putus pada gambar di atas merupakan sumbu simetri. Koordinat yang ditandai dengan bulatan merupakan titik puncak sedangkan koordinat yang ditandai dengan persegi merupakan titik potong dengan sumbu- y .

Nilai b pada grafik $y = ax^2 + bx + c$ menunjukkan letak koordinat titik puncak dan sumbu simetri (titik puncak dan sumbu simetri dibahas lebih lanjut pada subbab selanjutnya). Jika $a > 0$, grafik $y = ax^2 + bx + c$ memiliki titik puncak minimum. Jika $a < 0$, grafik $y = ax^2 + bx + c$ memiliki titik puncak maksimum.

Nilai c pada grafik $y = ax^2 + bx + c$ menunjukkan titik perpotongan grafik fungsi kuadrat tersebut dengan sumbu- y , yakni pada koordinat $(0, c)$.

Contoh 1**Grafik Fungsi Kuadrat**

Berikut ini adalah grafik lima fungsi kuadrat yang berbeda.



1. Grafik yang berwarna hitam merupakan grafik fungsi kuadrat $y = x^2 - x + 2$. Grafik $y = x^2 - x + 2$ memotong sumbu-y pada koordinat $(0, 2)$ dan memiliki titik puncak minimum.
2. Grafik yang berwarna merah merupakan grafik fungsi kuadrat $y = 2x^2 - 6x + 4$. Grafik $y = 2x^2 - 6x + 4$ memotong sumbu-y pada koordinat $(0, 4)$ dan memiliki titik puncak minimum.
3. Grafik yang berwarna biru merupakan grafik fungsi kuadrat $y = -2x^2 + 8$. Grafik $y = -2x^2 + 8$ memotong sumbu-y pada koordinat $(0, 8)$ dan memiliki titik puncak maksimum.

- Grafik yang berwarna merah dengan garis putus-putus merupakan grafik fungsi kuadrat $y = x^2 - 7x + 10$. Grafik $y = x^2 - 7x + 10$ memotong sumbu- y pada koordinat $(0, 10)$ dan memiliki titik puncak minimum.
- Grafik yang berwarna biru dengan garis putus-putus merupakan grafik fungsi kuadrat $y = -x^2 - 5x - 6$. Grafik $y = -x^2 - 5x - 6$ memotong sumbu- y pada koordinat $(0, -6)$ dan memiliki titik puncak maksimum.



**Ayo Kita
Tinjau Ulang**

- Mengapa fungsi kuadrat $y = ax^2 + bx + c$ disyaratkan $a \neq 0$? Jelaskan alasanmu.
- Terdapat dua fungsi kuadrat, $f(x) = ax^2 + bx + c$ dan $g(x) = -f(x) = -ax^2 - bx - c$. Apa yang dapat disimpulkan dari grafik $f(x)$ dan $g(x)$.

Latihan 2.2

Grafik Fungsi Kuadrat

- Gambarkan grafik fungsi kuadrat berikut.

a. $y = \frac{1}{2}x^2$	c. $y = -\frac{1}{2}x^2$
b. $y = \frac{1}{4}x^2$	d. $y = -\frac{1}{2}x^2$
- Dari Soal 1, apa yang dapat kamu simpulkan mengenai grafik $y = ax^2$ dengan $|a| < 1$ dan $a \neq 0$?
- Gambarkan grafik fungsi kuadrat berikut.

a. $y = x^2 + 3x + 2$	c. $y = x^2 + 5x + 6$
b. $y = x^2 - 3x + 2$	d. $y = x^2 - 5x + 6$
- Dari Soal 3, apa yang dapat kamu simpulkan mengenai perbandingan grafik $y = ax^2 + bx + c$ dengan $y = ax^2 - bx + c$?
- Gambarkan grafik fungsi kuadrat berikut.

a. $y = x^2 + 4x + 2$	c. $y = x^2 - 5x + 5$
b. $y = -x^2 + 2x + 3$	d. $y = -2x^2 + 4x + 5$



6. Dari soal nomor 5, tentukan titik puncak tiap-tiap grafik. Tentukan pula hubungan titik puncak grafik fungsi $y = ax^2 + bx + c$ dengan nilai $-\frac{b}{2a}$.
7. Apakah mungkin grafik fungsi kuadrat tidak memotong sumbu- x ? Jelaskan alasanmu.
8. Apakah mungkin grafik fungsi kuadrat tidak memotong sumbu- y ? Jelaskan alasanmu.
9. Apakah mungkin grafik fungsi kuadrat memotong sumbu- x pada tiga titik koordinat berbeda? Jelaskan alasanmu.
10. Apakah mungkin grafik fungsi kuadrat memotong sumbu- y pada dua titik koordinat berbeda? Jelaskan alasanmu.

2.3

Sumbu Simetri dan Nilai Optimum



Pertanyaan Penting

- a. Bagaimana kamu menentukan sumbu simetri grafik fungsi kuadrat?
- b. Bagaimana menentukan nilai optimum fungsi kuadrat tersebut?

Kegiatan 1

Pergeseran Grafik Fungsi Kuadrat



Ayo Kita Amati

1. Gambarlah dan amati grafik fungsi kuadrat di bawah ini pada bidang koordinat.
 - a. $f(x) = x^2$
 - b. $f(x) = (x - 1)^2$
 - c. $f(x) = (x - 2)^2$
 - d. $f(x) = (x + 1)^2$
 - e. $f(x) = (x + 2)^2$
2. Gambarlah dan amati grafik fungsi kuadrat di bawah ini pada bidang koordinat.
 - a. $f(x) = x^2$
 - b. $f(x) = x^2 + 1$
 - c. $f(x) = x^2 + 2$
 - d. $f(x) = x^2 - 1$
 - e. $f(x) = x^2 - 2$



**Ayo Kita
Menalar**

Berdasarkan kegiatan di atas, bandingkan grafik lima fungsi pada bagian (1)

Grafik $f(x) = (x - 1)^2$ adalah pergeseran grafik fungsi $f(x) = x^2$ sejauh ... satuan ke ...

Grafik $f(x) = (x - 2)^2$ adalah pergeseran grafik fungsi $f(x) = x^2$ sejauh ... satuan ke ...

Grafik $f(x) = (x + 1)^2$ adalah pergeseran grafik fungsi $f(x) = x^2$ sejauh ... satuan ke ...

Grafik $f(x) = (x + 2)^2$ adalah pergeseran grafik fungsi $f(x) = x^2$ sejauh ... satuan ke ...

Bandingkan grafik dari lima fungsi pada bagian (2)

Grafik $f(x) = x^2 + 1$ adalah pergeseran grafik fungsi $f(x) = x^2$ sejauh ... satuan ke ...

Grafik $f(x) = x^2 + 2$ adalah pergeseran grafik fungsi $f(x) = x^2$ sejauh ... satuan ke ...

Grafik $f(x) = x^2 - 1$ adalah pergeseran grafik fungsi $f(x) = x^2$ sejauh ... satuan ke ...

Grafik $f(x) = x^2 - 2$ adalah pergeseran grafik fungsi $f(x) = x^2$ sejauh ... satuan ke ...



**Ayo Kita
Simpulkan**

Berdasarkan kegiatan di atas, maka

1. Untuk s positif maka grafik $f(x) = (x - s)^2$ adalah pergeseran grafik fungsi $f(x) = x^2$ sejauh ... satuan ke ...
2. Untuk s positif maka grafik $f(x) = (x + s)^2$ adalah pergeseran grafik fungsi $f(x) = x^2$ sejauh ... satuan ke ...
3. Untuk t positif maka grafik $f(x) = x^2 + t$ adalah pergeseran grafik fungsi $f(x) = x^2$ sejauh ... satuan ke ...
4. Untuk t positif maka grafik $f(x) = x^2 - t$ adalah pergeseran grafik fungsi $f(x) = x^2$ sejauh ... satuan ke ...
5. Untuk s dan t positif maka grafik $f(x) = (x - s)^2 + t$ adalah pergeseran grafik fungsi $f(x) = x^2$ sejauh ... satuan ke ... dan dilanjutkan dengan pergeseran sejauh ... satuan ke ...

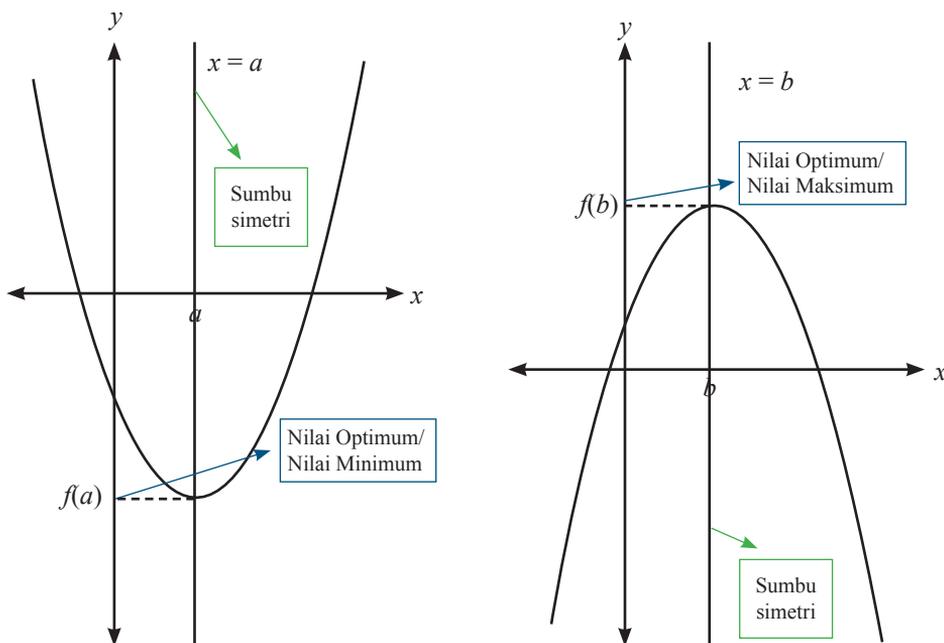


6. Untuk s dan t positif maka grafik $f(x) = (x - s)^2 - t$ adalah pergeseran grafik fungsi $f(x) = x^2$ sejauh ... satuan ke ... dan dilanjutkan dengan pergeseran sejauh ... satuan ke ...
7. Untuk s dan t positif maka grafik $f(x) = (x + s)^2 + t$ adalah pergeseran grafik fungsi $f(x) = x^2$ sejauh ... satuan ke ... dan dilanjutkan dengan pergeseran sejauh ... satuan ke ...
8. Untuk s dan t positif maka grafik $f(x) = (x + s)^2 - t$ adalah pergeseran grafik fungsi $f(x) = x^2$ sejauh ... satuan ke ... dan dilanjutkan dengan pergeseran sejauh ... satuan ke ...

Kegiatan 2

Menentukan Sumbu Simetri dan Nilai Optimum

Buatlah sumbu simetri untuk setiap grafik yang telah dibuat pada Kegiatan 1. Dalam bagian ini digunakan istilah nilai optimum yaitu nilai maksimum atau minimum dari suatu fungsi $f(x)$ sehingga dengan demikian jika $f(x)$ adalah fungsi kuadrat (grafik berbentuk parabola) dan $x = a$ adalah sumbu simetri dari grafik fungsi $f(x)$ maka nilai optimumnya adalah $f(a)$ (untuk lebih jelasnya lihat gambar di bawah ini). Gunakan materi yang dibahas pada bagian sebelumnya yaitu tentang pergeseran grafik untuk menjawab bagian “Ayo Kita Menalar” berikut.





Ayo Kita Menalar

Isilah tabel di bawah ini.

Fungsi	$f(x) = x^2$	$f(x) = (x - 1)^2$	$f(x) = (x - 2)^2$	$f(x) = (x + 1)^2$	$f(x) = (x + 2)^2$
Sumbu simetri	$x = 0$	$x = \dots$	$x = \dots$	$x = \dots$	$x = \dots$
Nilai optimum	$f(0) = 0$	$f(\dots) = \dots$	$f(\dots) = \dots$	$f(\dots) = \dots$	$f(\dots) = \dots$

Isilah tabel di bawah ini.

Fungsi	$f(x) = x^2$	$f(x) = x^2 + 1$	$f(x) = x^2 + 2$	$f(x) = x^2 - 1$	$f(x) = x^2 - 2$
Sumbu simetri	$x = 0$	$x = \dots$	$x = \dots$	$x = \dots$	$x = \dots$
Nilai optimum	$f(0) = 0$	$f(\dots) = \dots$	$f(\dots) = \dots$	$f(\dots) = \dots$	$f(\dots) = \dots$



Ayo Kita Simpulkan

Berdasarkan pengamatan di atas, jawablah pertanyaan berikut ini.

1. Tentukan sumbu simetri dan nilai optimum grafik fungsi $f(x) = (x - s)^2$?
2. Tentukan sumbu simetri dan nilai optimum grafik fungsi $f(x) = x^2 + t$?
3. Tentukan sumbu simetri dan nilai optimum grafik fungsi $f(x) = (x - s)^2 + t$?



Ayo Kita Menalar

Sumbu simetri grafik fungsi $f(x) = ax^2$ adalah ...

Jadi

Sumbu simetri grafik fungsi $f(x) = a(x - s)^2$ adalah ... dan nilai optimumnya adalah ...

Sumbu simetri grafik fungsi $f(x) = a(x - s)^2 + t$ adalah ... dan nilai optimumnya adalah ...

Kemudian untuk

$$\begin{aligned}
 f(x) &= ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \dots\right) - a(\dots)^2 + c \\
 &= a(x + \dots)^2 - a(\dots) + c = a(x + \dots)^2 - \frac{\dots}{4a} + c \\
 &= a(x + \dots)^2 - \frac{\dots}{4a} + \frac{\dots}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - \dots}{4a}
 \end{aligned}$$

didapatkan sumbu simetrinya adalah

$$x = \dots,$$

dengan nilai optimumnya adalah

$$f(\dots) = \dots,$$

sehingga titik optimumnya adalah

$$(\dots, \dots)$$



Ayo Kita Simpulkan

Apa rumus untuk mendapatkan sumbu simetri dan nilai optimum dari grafik fungsi $f(x) = ax^2 + bx + c$?

Kegiatan 3

Sketsa Grafik Fungsi Kuadrat

Sketsalah grafik $f(x) = 3x^2 - 10x + 9$ dan $f(x) = -2x^2 + 12x - 20$.



Ayo Kita Gali Informasi

Berikut adalah langkah-langkah menggambar sketsa grafik fungsi kuadrat dengan menggunakan sifat-sifat yang telah dibahas pada bagian sebelumnya.

1. Periksalah, apakah bentuk parabola grafik fungsi di atas terbuka ke atas atau ke bawah! (dengan melihat nilai dari koefisien x^2)
2. Tentukan perpotongan grafik terhadap sumbu- x ; yaitu, koordinat titik potongnya adalah $(x_1, 0)$ yang memenuhi persamaan

$$f(x_1) = 0$$

(Perhatikan apakah persamaan tersebut mempunyai penyelesaian atau tidak, jika tidak apa yang bisa kamu simpulkan? (ingat kembali pada materi sebelumnya yaitu tentang hubungan antara diskriminan dan penyelesaian dari persamaan kuadrat))

3. Tentukan perpotongan grafik terhadap sumbu- y ; yaitu, koordinat titik potongnya adalah $(0, y_1)$ dengan y_1 didapatkan berdasarkan persamaan

$$y_1 = f(0)$$

4. Tentukan sumbu simetri dan nilai optimum grafik fungsi di atas.
5. Dari informasi yang didapatkan, sketsalah grafik fungsi kuadrat di atas.



Ayo Kita Berbagi

Diskusikan dengan temanmu, bagaimana bentuk grafik $f(x) = \sqrt{x}$ dan $f(x) = -\sqrt{x}$? Bandingkan grafiknya dengan grafik persamaan kuadrat. Apa yang bisa kamu dapatkan dari analisis ini?



Ayo Kita Menanya

Buatlah fungsi kuadrat $y = ax^2 + bx + c$, lalu mintalah temanmu sebangkumu untuk menggambar grafik dari fungsi tersebut.

Materi Esensi 2.3

Menentukan Sumbu Simetri dan Titik Optimum

Fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$ mempunyai sumbu simetri

$$x = -\frac{b}{a}$$

Dengan nilai optimumnya adalah

$$y_0 = -\frac{D}{4a}$$

Langkah-langkah mensketsa grafik fungsi kuadrat:

Langkah 1. Menentukan bentuk parabola (terbuka ke atas atau ke bawah).

Langkah 2. Menentukan perpotongan grafik terhadap sumbu- x ; yaitu, koordinat titik potongnya adalah $(x_1, 0)$ yang memenuhi persamaan

$$f(x_1) = 0$$

Langkah 3. Menentukan perpotongan grafik terhadap sumbu- y ; yaitu, koordinat titik potongnya adalah $(0, y_1)$ dengan y_1 didapatkan berdasarkan persamaan

$$y_1 = f(0)$$

Langkah 4. Menentukan sumbu simetri dan nilai optimum dari grafik fungsi.

Langkah 5. Mensketsa grafik fungsi kuadrat berdasarkan langkah (1), (2), (3), dan (4).

Contoh 1

Menentukan Sumbu Simetri dan Nilai Optimum

Tentukan sumbu simetri dan nilai optimum dari grafik fungsi $f(x) = x^2 - 4x + \frac{1}{2}$.

Alternatif Penyelesaian:

Diketahui: fungsi kuadrat $f(x) = x^2 - 4x + \frac{1}{2}$, didapatkan $a = 1$, $b = -4$ dan $c = \frac{1}{2}$.

Ditanya: sumbu simetri dan titik optimum

Penyelesaian:

Persamaan sumbu simetrinya adalah

$$x = -\frac{b}{a} = -\frac{-4}{2(1)} = 2$$

Nilai optimum fungsi tersebut adalah

$$y_0 = -\frac{D}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{(-4)^2 - 4(1)\left(\frac{1}{2}\right)}{4(1)} = -\frac{7}{2}$$

Sehingga titik optimumnya adalah

$$(x, y_0) = \left(2, -\frac{7}{2}\right)$$

Contoh 2

Menentukan Nilai Maksimum dan Minimum

Tentukan apakah fungsi $f(x) = -2x^2 - 12x - 17$ mempunyai nilai maksimum atau minimum. Tentukan nilainya.

Alternatif Penyelesaian:

Diketahui : fungsi kuadrat $f(x) = -2x^2 - 12x - 17$

didapatkan $a = -2$, $b = -12$ dan $c = -17$.

Ditanya : Tentukan apakah ada nilai maksimum atau minimum. Tentukan nilai maksimum atau minimumnya.

Penyelesaian :

Karena nilai $a = -2 < 0$ maka parabola terbuka ke bawah sehingga yang ada hanya nilai maksimum. Nilai maksimumnya adalah

$$y_m = -\frac{D}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{(-12)^2 - 4(2)(-17)}{4(-2)} = -\frac{144 - 136}{-8} = 1$$

Contoh 3

Sketsa Grafik

Sketsalah grafik $f(x) = x^2 - 6x + 10$

Alternatif Penyelesaian:

Diketahui: fungsi kuadrat $f(x) = x^2 - 6x + 10$, didapat $a = 1$, $b = -6$ dan $c = 10$

Ditanya: Sketsa grafik

Penyelesaian :

Langkah 1. Karena $a = 1 > 0$ maka parabola terbuka ke atas

Langkah 2. Perpotongan grafik terhadap sumbu- x

Dihitung bahwa $D = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4(1)(10) = -4 < 0$. Sehingga grafik tidak memotong sumbu- x .



Langkah 3. Perpotongan grafik terhadap sumbu-y

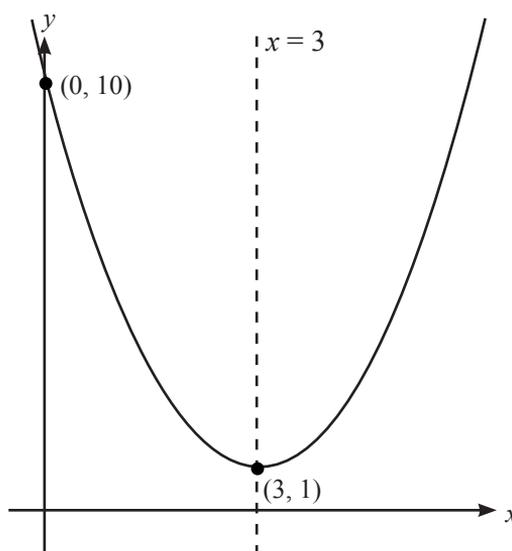
$$y_0 = f(0) = 10 \text{ yaitu pada titik } (0, 10).$$

Langkah 4. Sumbu simetri dan nilai optimum dari fungsi

Sumbu simetrinya adalah $x = -\frac{b}{2a} = 3$ dan nilai optimumnya didapat

$$y_0 = -\frac{D}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{(-6)^2 - 4(1)(10)}{4(1)} = -\frac{-4}{4} = 1$$

Langkah 5. Sketsa Grafik



**Ayo Kita
Tinjau Ulang**

1. Tentukan fungsi kuadrat $f(x) = x^2 - 4x + c$ sedemikian hingga nilai optimumnya adalah 20.
2. Tentukan nilai a dan b untuk fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + 1$ sedemikian hingga
 - a. Fungsi $f(x)$ mempunyai nilai maksimum 10 dan sumbu simetri $x = 3$.
 - b. Fungsi $f(x)$ mempunyai nilai minimum dengan nilai minimum -10 dan sumbu simetri $x = 3$.
3. Sketsalah grafik $f(x) = -3x^2 - 10x + 9$



Latihan 2.3**Sumbu Simetri dan Titik Optimum**

1. Tentukan sumbu simetri grafik fungsi di bawah ini.
 - a. $y = 2x^2 - 5x$
 - b. $y = 3x^2 + 12x$
 - c. $y = -8x^2 - 16x - 1$
2. Tentukan nilai optimum fungsi berikut ini.
 - a. $y = -6x^2 + 24x - 19$
 - b. $y = \frac{2}{5}x^2 - 3x + 15$
 - c. $y = -\frac{3}{4}x^2 + 7x - 18$
3. Sketsalah grafik fungsi berikut ini.
 - a. $y = 2x^2 + 9x$
 - b. $y = 8x^2 - 16x + 6$
4. Diketahui suatu barisan 1, 7, 16, Suku ke- n dari barisan tersebut dapat dihitung dengan rumus $U_n = an^2 + bn + c$. Tentukan suku ke 100.
5. Diketahui suatu barisan 0, -9, -12, Suku ke- n dari barisan tersebut dapat dihitung dengan rumus $U_n = an^2 + bn + c$. Tentukan nilai minimum dari barisan tersebut.
6. Fungsi kuadrat $y = f(x)$ melalui titik (3, -12) dan (7, 36). Jika sumbu simetrinya $x = 3$, tentukan nilai minimum fungsi $f(x)$.
7. Bila fungsi $y = 2x^2 + 6x - m$ mempunyai nilai minimum 3 maka tentukan m .
8. Dari tahun 1995 sampai 2002, banyaknya pelanggan telepon genggam N (dalam juta orang) dapat dimodelkan oleh persamaan $N = 17,4x^2 + 36,1x + 83,3$, dengan $x = 0$ merepresentasikan tahun 1995. Pada tahun berapa banyaknya pelanggan mencapai nilai maksimum?

9. Jumlah dua bilangan adalah 30. Jika hasil kali kedua bilangan menghasilkan nilai yang maksimum, tentukan kedua bilangan tersebut.
10. Selisih dua bilangan adalah 10. Jika hasil kali kedua bilangan menghasilkan nilai yang minimum, tentukan kedua bilangan tersebut.

2.4

Menentukan Fungsi Kuadrat

Kamu sudah mengetahui bagaimana cara menggambar grafik suatu fungsi kuadrat. Kamu juga sudah mengetahui bagaimana mendapatkan titik puncak, titik potong dan sumbu simetri. Pada sub-bab ini kamu akan mengetahui cara untuk menentukan fungsi kuadrat dari informasi yang ada.



Pertanyaan Penting

- a. Bagaimana cara menentukan fungsi kuadrat jika sudah diketahui grafiknya?
- b. Bagaimana cara menentukan fungsi kuadrat jika diketahui titik puncak, titik potong atau sumbu simetri?

Kegiatan 1

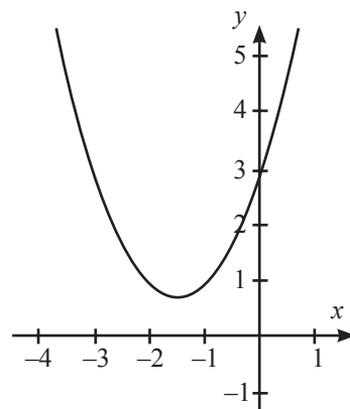
Menentukan Fungsi Kuadrat Berdasarkan Grafiknya



Ayo Kita Gali Informasi

Gambar di samping merupakan grafik suatu fungsi kuadrat. Dapatkah kamu menentukan suatu fungsi yang grafiknya seperti gambar di samping?

- a. Informasi apakah yang kamu peroleh dari grafik di samping?
- b. Apakah grafik di samping memotong sumbu- x ?
- c. Pada koordinat mana grafik di samping memotong sumbu- y ?





Diskusi

Diskusikan dengan temanmu tiga pertanyaan di atas. Kemudian diskusikan pertanyaan berikut.

- Berdasarkan jawaban tiga pertanyaan di atas, apakah kamu dapat menentukan fungsi kuadrat sesuai di atas?
- Minimal berapa koordinat yang harus diketahui agar kamu bisa menentukan tepat satu fungsi kuadrat berdasarkan grafik?

Kegiatan 2

Menentukan Fungsi Kuadrat Berdasarkan Titik Potong Sumbu- x

Kamu sudah mengetahui cara mendapatkan akar-akar fungsi kuadrat $f(x) = 0$. Diberikan fungsi kuadrat berikut.

- $f(x) = x^2 + 3x + 4$
- $f(x) = x^2 + 4x + 4$
- $f(x) = x^2 - 6x + 5$



Ayo Kita Gali Informasi

- Tentukan akar-akar tiap-tiap persamaan kuadrat $f(x) = 0$. Tentukan persamaan $f(x) = 0$ yang tidak memiliki akar, persamaan $f(x) = 0$ yang memiliki satu akar, dan persamaan $f(x) = 0$ yang memiliki dua akar.
- Gambarkan grafik tiap-tiap fungsi kuadrat.
- Tentukan fungsi kuadrat yang tidak memotong sumbu- x , fungsi yang memotong sumbu- x di satu titik dan yang memotong sumbu- x di dua titik.
- Apa yang dapat kamu simpulkan mengenai hubungan akar-akar persamaan $f(x) = 0$ dengan titik potong sumbu- x ?



Diskusi

Misalkan terdapat dua fungsi kuadrat;

$$y = x^2 + 3x + 2 \text{ dan } y = 2x^2 + 6x + 4 = 2(x^2 + 3x + 2)$$

Diskusikan beberapa pertanyaan berikut.

- Tentukan akar-akar untuk persamaan $f(x) = 0$ untuk fungsi-fungsi kuadrat di atas. Apakah hasilnya sama untuk kedua fungsi-fungsi di atas?
- Gambarkan grafik tiap-tiap fungsi kuadrat. Apakah kedua fungsi kuadrat tersebut memiliki grafik yang sama?
- Apa yang dapat kamu simpulkan?
- Jika diketahui akar-akar dari persamaan $f(x) = 0$, apakah kamu pasti selalu bisa menentukan fungsi kuadratnya?



Ayo Kita Simpulkan

Jika fungsi kuadrat $y = ax^2 + bx + c$ dengan $y = 0$ memiliki akar-akar $x = p$ dan $x = q$ dengan $p \neq q$ maka grafik fungsi kuadrat tersebut akan memotong sumbu- x pada koordinat ... dan Bentuk umumnya adalah ...

Kegiatan 3

Menentukan Fungsi Kuadrat dari Beberapa Informasi

Pada kegiatan ini kamu akan mempelajari dan menganalisis cara menentukan fungsi kuadrat dari beberapa informasi. Informasinya adalah sebagai berikut:

- Titik potong dengan sumbu- x .
- Titik potong dengan sumbu- y .
- Titik puncak dan sumbu simetri.
- Beberapa titik koordinat yang dilalui fungsi kuadrat tersebut.

Berdasarkan Kegiatan 1 dan 2, kamu masih belum bisa menentukan fungsi kuadrat jika hanya diketahui satu informasi dari empat informasi di atas.

1. Jika diketahui tiga koordinat berbeda

Perhatikan gambar di samping. Misalkan terdapat suatu fungsi kuadrat yang grafiknya melalui tiga koordinat berbeda, yakni $(0, 1)$, $(1, 3)$, dan $(2, 7)$.

Apakah kamu dapat menentukan fungsi kuadrat berdasarkan tiga koordinat yang diketahui dan bagaimana caranya?

Perhatikan langkah-langkah berikut.

a. Misalkan fungsi kuadratnya adalah $f(x) = ax^2 + bx + c$.

b. Karena melewati koordinat $(0, 1)$, $(1, 3)$ dan $(2, 7)$ diperoleh $f(0) = 1$, $f(1) = 3$ dan $f(2) = 7$.

- $f(0) = a(0)^2 + b(0) + c = 1 \rightarrow c = 1$. Diperoleh

$$f(x) = ax^2 + bx + 1$$

- $f(1) = a(1)^2 + b(1) + 1 = 3 \rightarrow a + b + 1 = 3$. Diperoleh persamaan

$$a + b = 2 \quad \dots (1)$$

- $f(2) = a(2)^2 + b(2) + 1 = 7 \rightarrow 4a + 2b + 1 = 7$. Diperoleh persamaan

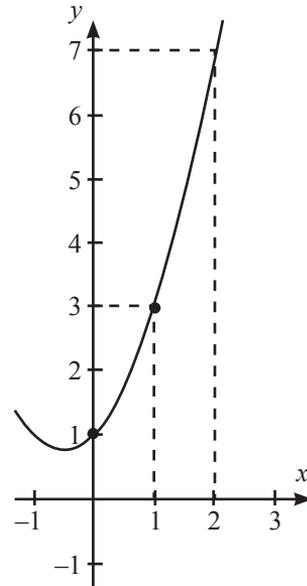
$$4a + 2b = 6 \quad \dots (2)$$

c. Dengan mensubstitusi $a = 2 - b$ ke persamaan (2), diperoleh $b = \dots$

d. Dari hasil c diperoleh $a = \dots$

e. Sehingga fungsi kuadrat yang memenuhi adalah

$$f(x) = ax^2 + bx + c = \dots$$

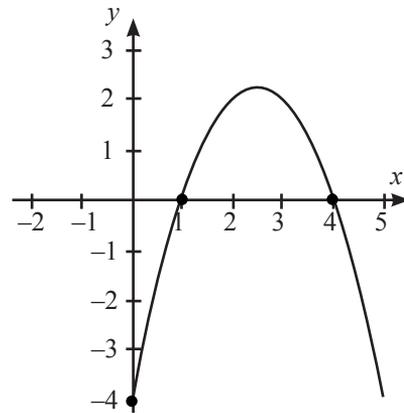


**Ayo Kita
Simpulkan**

Jika grafik fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$ melalui titik koordinat (p, q) diperoleh hubungan ...

2. Jika diketahui titik potong dengan sumbu-x dan sumbu-y

Perhatikan gambar di samping. Misalkan terdapat suatu grafik fungsi kuadrat yang memotong sumbu-x di $(1, 0)$ dan $(4, 0)$. Fungsi kuadrat tersebut juga memotong sumbu-y di $(0, -4)$.



Apakah kamu sudah bisa menentukan fungsi kuadratnya? Bagaimana caranya?

Perhatikan langkah-langkah berikut.

a. Misalkan fungsi kuadratnya adalah $f(x) = ax^2 + bx + c$.

b. Karena memotong sumbu-x di $(1, 0)$ dan $(4, 0)$, dapat dituliskan

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - \dots)(x - \dots).$$

c. Karena memotong sumbu-y di $(0, -4)$, diperoleh $f(0) = -4$.

$$f(0) = a(0 - \dots)(0 - \dots)$$

$$-4 = a \times \dots$$

Diperoleh $a = \dots$ dan fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c = \dots$



**Ayo Kita
Simpulkan**

Jika grafik fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$ memotong sumbu-x pada titik koordinat $(p, 0)$ dan $(q, 0)$ maka fungsi kuadrat tersebut dapat dituliskan menjadi

$$f(x) = \dots$$

Jika grafik fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$ memotong sumbu-y pada titik koordinat $(0, r)$ maka diperoleh

$$f(0) = \dots$$

Dengan mensubstitusikan nilai $x = 0$ pada fungsi kuadrat $y = ax^2 + bx + c$ diperoleh

$$f(0) = \dots$$

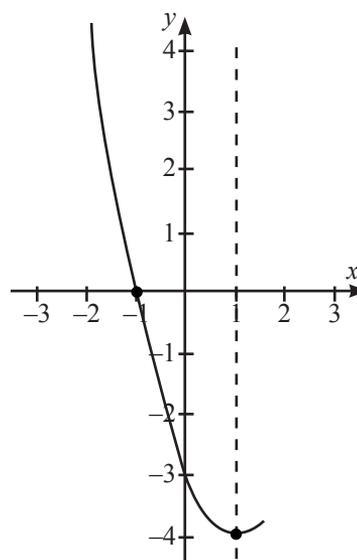
yang berakibat ...

3. Jika diketahui titik potong sumbu- x dan titik puncak

Perhatikan gambar di samping. Terdapat suatu fungsi kuadrat yang memotong sumbu- x di $(-1, 0)$. Titik puncak fungsi kuadrat tersebut berada di koordinat $(1, -4)$.

Apakah kamu sudah bisa menentukan fungsi kuadratnya dan bagaimana caranya?

Perhatikan langkah-langkah berikut.



a. Misalkan fungsi kuadratnya adalah $f(x) = ax^2 + bx + c$.

b. Berdasarkan grafik di samping diperoleh sumbu simetri $x = 1$. Berdasarkan sifat simetri, titik potong di sumbu- x yang lain adalah hasil pencerminan koordinat $(-1, 0)$ terhadap garis $x = 1$, yakni koordinat dengan $x = \dots$

c. Sehingga fungsi kuadratnya dapat dinyatakan dengan

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x + 1)(x - \dots)$$

d. Karena titik puncak berada di $(1, -4)$ maka diperoleh $f(1) = -4$.

$$f(1) = a(1 + 1)(1 - \dots)$$

$$-4 = a \times \dots$$

diperoleh $a = \dots$ dan fungsi kuadrat $f(x) = \dots$



**Ayo Kita
Simpulkan**

Jika fungsi kuadrat $y = ax^2 + bx + c$ memiliki titik puncak pada titik koordinat (s, t) maka sumbu simetri fungsi kuadrat tersebut adalah garis

$$x = \dots$$

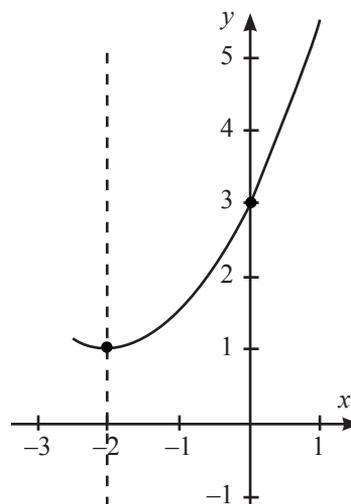
4. Jika diketahui titik potong sumbu-y dan titik puncak

Perhatikan gambar di samping. Terdapat suatu fungsi kuadrat yang memotong sumbu-y di $(0, 3)$. Titik puncak fungsi kuadrat tersebut berada di koordinat $(-2, 1)$.

Apakah kamu sudah bisa menentukan fungsi kuadratnya dan bagaimana caranya?

Perhatikan langkah-langkah berikut.

- Misalkan fungsi kuadratnya adalah $f(x) = ax^2 + bx + c$.
- Berdasarkan grafik di samping diperoleh sumbu simetri $x = -2$. Berdasarkan sifat simetri, jika titik $(0, 3)$ dicerminkan terhadap garis $x = -2$ diperoleh koordinat
- Sehingga grafik fungsi kuadrat tersebut melalui tiga titik koordinat yaitu $(0, 3)$, $(-2, 1)$, dan ...
- Dengan menggunakan cara seperti pada Sub-Kegiatan 3.1, diperoleh $a = \dots$, $b = \dots$ dan $c = \dots$
- Sehingga didapatkan fungsi kuadrat $f(x) = \dots$



Materi Esensi 2.4

Menentukan Fungsi Kuadrat

Untuk menentukan fungsi kuadrat diperlukan beberapa informasi, di antaranya sebagai berikut.

- Beberapa titik koordinat yang dilalui fungsi kuadrat tersebut.
- Titik potong fungsi kuadrat tersebut di sumbu-x.
- Titik potong fungsi kuadrat tersebut di sumbu-y.
- Titik puncak dan sumbu simetri.

Langkah pertama untuk mendapatkannya adalah dengan memisalkan fungsi kuadrat tersebut dengan $f(x) = ax^2 + bx + c$. Berikut ini adalah langkah selanjutnya berdasarkan informasi-informasi di atas.

- Jika diketahui beberapa titik koordinat yang lain.

Jika fungsi kuadrat tersebut melalui koordinat (p, q) , maka diperoleh $f(p) = q$.

2. Jika diketahui titik potong fungsi kuadrat tersebut di sumbu- x .
 Jika fungsi kuadrat memotong sumbu- x di $(p, 0)$ dan $(q, 0)$ maka fungsi kuadrat tersebut dapat dituliskan menjadi $f(x) = a(x - p)(x - q)$.

3. Jika diketahui titik potong fungsi kuadrat tersebut di sumbu- y .
 Jika fungsi kuadrat memotong sumbu- x di $(0, r)$ maka diperoleh

$$f(0) = r$$

Dengan mensubstitusikan nilai 0 pada $f(x)$ diperoleh

$$f(0) = a(0)^2 + b(0) + c = c.$$

Sehingga diperoleh $c = r$.

4. Jika diketahui titik puncak dan sumbu simetri.

Jika fungsi kuadrat tersebut memiliki titik puncak di (s, t) maka diperoleh sumbu simetri fungsi kuadrat tersebut adalah garis

$$x = s$$

Selanjutnya jika diketahui fungsi kuadrat tersebut melalui (e, d) maka dengan menggunakan sifat simetri diperoleh titik koordinat yang lain hasil pencerminan koordinat (e, d) terhadap garis $x = s$.

Contoh 1

Menentukan Fungsi Kuadrat I

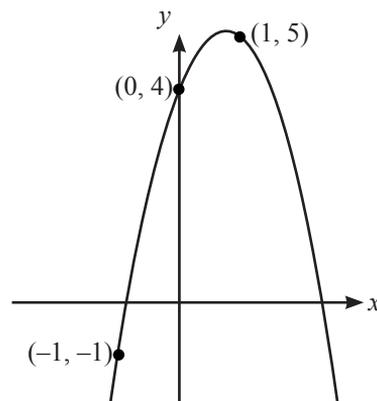
Tentukan fungsi kuadrat yang grafiknya melalui titik koordinat $(-1, -1)$, $(0, 4)$ dan $(1, 5)$.

Alternatif Penyelesaian:

- Misalkan fungsi kuadratnya adalah $f(x) = ax^2 + bx + c$.
- Karena melalui titik koordinat $(-1, -1)$, $(0, 4)$ dan $(1, 5)$ diperoleh $f(-1) = -1$, $f(0) = 4$ dan $f(1) = 5$.

- $f(0) = a(0)^2 + b(0) + c = 4 \rightarrow c = 4$.
 Diperoleh

$$f(x) = ax^2 + bx + 4$$



- $f(-1) = a(-1)^2 + b(-1) + 4 = -1 \rightarrow a - b + 4 = -1$. Diperoleh persamaan

$$a - b = -5 \quad \dots (1)$$

- $f(1) = a(1)^2 + b(1) + 4 = 5 \rightarrow a + b + 4 = 5$. Diperoleh persamaan

$$a + b = 1 \quad \dots (2)$$

Dengan menjumlahkan persamaan (1) dan (2) diperoleh

$$2a = -4 \rightarrow a = -2$$

Kemudian $b = 1 - a = 1 - (-2) = 3$.

c. Diperoleh nilai $a = -2$, $b = 3$ dan $c = 4$, sehingga fungsi kuadratnya adalah

$$f(x) = -2x^2 + 3x + 4$$

Contoh 2

Menentukan Fungsi Kuadrat II

Tentukan fungsi kuadrat yang grafiknya memiliki titik potong sumbu- x pada titik koordinat $(-2, 0)$ dan $(3, 0)$ serta memotong sumbu- y pada koordinat $(0, 3)$.

Alternatif Penyelesaian:

a. Misalkan fungsi kuadratnya adalah $f(x) = ax^2 + bx + c$.

b. Karena memotong sumbu- x pada koordinat $(-2, 0)$ dan $(3, 0)$, fungsi kuadratnya dapat diubah menjadi

$$f(x) = a(x + 2)(x - 3).$$

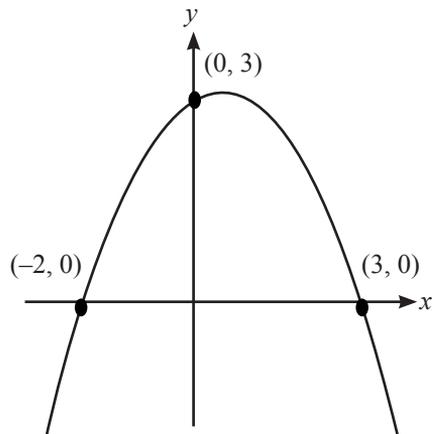
c. Karena memotong sumbu- y pada koordinat $(0, 3)$ diperoleh $f(0) = 3$

$$f(0) = a(0 + 2)(0 - 3) = -6a$$

Sehingga diperoleh $-6a = 3 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$

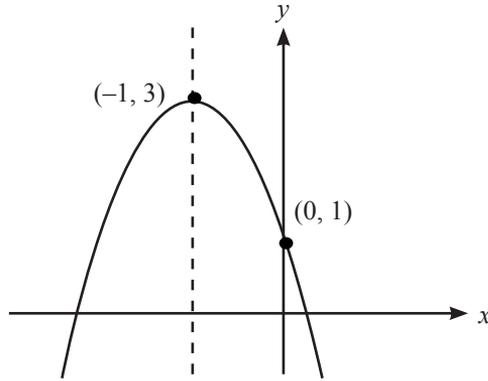
d. Diperoleh fungsi kuadrat:

$$f(x) = -\frac{1}{2}(x + 2)(x - 3) = -\frac{1}{2}(x^2 - x - 6) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 3$$



Contoh 3**Menentukan Fungsi Kuadrat III**

Tentukan fungsi kuadrat yang grafiknya memiliki titik puncak pada titik koordinat $(-1, 3)$ serta memotong sumbu- y pada titik koordinat $(0, 1)$.

**Alternatif Penyelesaian:**

- Misalkan fungsi kuadratnya adalah $f(x) = ax^2 + bx + c$.
- Diperoleh sumbu simetri $x = -1$.
- Berdasarkan sifat simetri, jika titik $(0, 3)$ dicerminkan terhadap garis $x = -1$ diperoleh titik koordinat $(-2, 1)$.
- Fungsi kuadrat melalui tiga titik koordinat, yakni $(0, 1)$, $(-1, 3)$ serta $(-2, 1)$.
- Karena melalui titik koordinat $(0, 1)$, $(-1, 3)$ dan $(-2, 1)$ diperoleh $f(0) = 1$, $f(-1) = 3$ dan $f(-2) = 1$.

$$- f(0) = a(0)^2 + b(0) + c = 1 \Leftrightarrow c = 1. \text{ Diperoleh}$$

$$f(x) = ax^2 + bx + 1$$

$$- f(-1) = a(-1)^2 + b(-1) + 1 = 3 \Leftrightarrow a - b + 1 = 3. \text{ Diperoleh persamaan}$$

$$a - b = 2 \quad \dots (1)$$

$$- f(-2) = a(-2)^2 + b(-2) + 1 = 1 \Leftrightarrow 4a - 2b + 1 = 1. \text{ Diperoleh persamaan}$$

$$2a - b = 0 \quad \dots (2)$$

Dengan mengurangi persamaan (1) dan (2) diperoleh

$$-a = 2 \Leftrightarrow a = -2$$

Kemudian $b = 2a = 2(-2) = -4$.



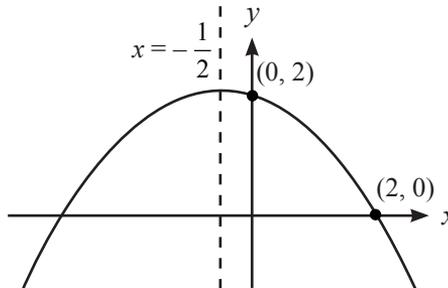
f. Diperoleh nilai $a = -2$, $b = -4$ dan $c = 1$, sehingga fungsi kuadratnya adalah

$$f(x) = -2x^2 - 4x + 1$$

Contoh 4

Menentukan Fungsi Kuadrat

Tentukan fungsi kuadrat yang grafiknya memiliki sumbu simetri $x = -\frac{1}{2}$ yang memotong sumbu- x pada titik koordinat $(2, 0)$ dan memotong sumbu- y pada koordinat $(0, 2)$.



Alternatif Penyelesaian:

- Misalkan fungsi kuadratnya adalah $f(x) = ax^2 + bx + c$.
- Berdasarkan sifat simetri, jika titik $(2, 0)$ dicerminkan terhadap garis $x = -\frac{1}{2}$ diperoleh titik koordinat $(-3, 0)$.
- Karena memotong sumbu- x pada koordinat $(2, 0)$ dan $(-3, 0)$, fungsi kuadratnya dapat diubah menjadi

$$f(x) = a(x + 3)(x - 2).$$

- Karena memotong sumbu- y pada koordinat $(0, 2)$ diperoleh $f(0) = 2$

$$f(0) = a(0 + 3)(0 - 2) = -6a$$

Sehingga diperoleh $-6a = 2 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{3}$

- Diperoleh fungsi kuadrat

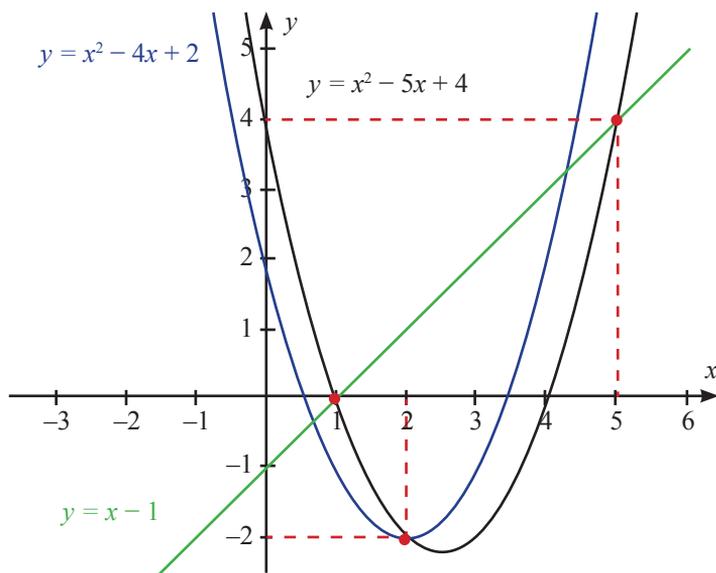
$$f(x) = -\frac{1}{3}(x + 3)(x - 2) = -\frac{1}{3}(x^2 + x - 6) = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x^2 + 2$$



Tahukah Kamu

Ketika kamu menggambar grafik fungsi linear dan grafik fungsi kuadrat (atau menggambar dua grafik fungsi kuadrat) dimungkinkan kedua grafik tersebut saling berpotongan.





Berdasarkan gambar di atas grafik fungsi linear $y = x - 1$ dan grafik fungsi kuadrat $y = x^2 - 5x + 4$ berpotongan pada dua titik koordinat, yaitu $(1, 0)$ dan $(5, 4)$. Sedangkan grafik fungsi kuadrat $y = x^2 - 5x + 4$ dan $y = x^2 - 4x + 2$ berpotongan pada satu titik koordinat, yaitu $(2, -2)$.

Kamu juga dapat menentukan titik potongnya tanpa menggambar grafik. Caranya adalah dengan “**menyamakannya**”.

1. Titik potong grafik fungsi linear dan fungsi kuadrat.

Fungsi linear : $y = -x + 1$, fungsi kuadrat : $y = x^2 - 5x + 4$

Dengan menyamakan kedua fungsi di atas diperoleh

$$x^2 - 5x + 4 = x - 1$$

$$x^2 - 5x + 4 - x + 1 = 0$$

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$(x - 1)(x - 5) = 0$$

Sehingga $x = 1$ atau $x = 5$.

Dari nilai x di atas kamu dapat memperoleh nilai y dengan mensubstitusikan nilai x pada salah satu fungsi.

Untuk $x = 1 \Leftrightarrow y = x - 1 = 1 - 1 = 0$, diperoleh titik koordinat $(1, 0)$.

Untuk $x = 5 \Leftrightarrow y = x - 1 = 5 - 1 = 4$, diperoleh titik koordinat $(5, 4)$.

Jadi titik potongnya pada titik koordinat $(1, 0)$ dan $(5, 4)$.



2. Titik potong dua fungsi kuadrat.

Fungsi kuadrat $f_1(x) = x^2 - 5x + 4$ dan $f_2(x) = x^2 - 4x + 2$

Karena yang dicari titik potong maka $f_1(x) = f_2(x)$, selanjutnya didapatkan

$$\begin{aligned}x^2 - 5x + 4 &= x^2 - 4x + 2 \\x^2 - 5x + 4 - (x^2 - 4x + 2) &= 0 \\-x + 2 &= 0\end{aligned}$$

Diperoleh $x = 2$.

Dari nilai x di atas kamu dapat memperoleh nilai y dengan mensubstitusikan nilai x pada salah satu fungsi.

Untuk $x = 2 \Leftrightarrow y = x^2 - 5x + 4 = (2)^2 - 5(2) + 4 = -2$, diperoleh titik koordinat $(2, -2)$.

Jadi titik potongnya pada titik koordinat $(2, -2)$.



Ayo Kita Tinjau Ulang

1. Untuk suatu bilangan bulat $p > q > 0$, apakah terdapat suatu fungsi kuadrat $y = ax^2 + bx + c$ yang melalui titik koordinat $(1, p)$ dan $(1, q)$?
Jelaskan alasanmu.
2. Untuk suatu bilangan bulat $p > q > r > 0$, apakah terdapat suatu fungsi kuadrat $y = ax^2 + bx + c$ yang melalui titik koordinat $(2, p)$, $(2, q)$ dan $(2, r)$?
Jelaskan alasanmu.
3. Apakah mungkin grafik fungsi linear dan grafik fungsi kuadrat berpotongan di tiga titik koordinat berbeda?
Jelaskan alasanmu.
4. Apakah mungkin dua grafik fungsi kuadrat berpotongan di tiga titik koordinat berbeda?

Latihan 2.4

Menentukan Fungsi Kuadrat

1. Tentukan fungsi kuadrat yang grafiknya melalui titik koordinat $(-1, 1)$, $(0, -4)$, dan $(1, -5)$.
2. Tentukan fungsi kuadrat yang grafiknya memotong sumbu- x pada titik koordinat $(4, 0)$ dan $(-3, 0)$ serta melalui titik koordinat $(2, -10)$.



3. Tentukan fungsi kuadrat yang grafiknya memotong sumbu- x pada koordinat $(-2, 0)$ dan memiliki titik puncak pada koordinat $(2, -16)$.
4. Tentukan fungsi kuadrat yang grafiknya memotong sumbu- y pada koordinat $(0, 4)$, melalui titik koordinat $(-1, -1)$ dan memiliki sumbu simetri $x = 2$.
5. **Tantangan.** Tentukan fungsi kuadrat yang grafiknya melalui $(12, 0)$, $(0, 3)$, dan $(0, -2)$.
6. Untuk suatu bilangan bulat p , tentukan fungsi kuadrat yang grafiknya melalui titik koordinat $(p, 0)$ dan $(-p, 0)$, dan $(0, p)$.
7. Tentukan semua titik potong grafik fungsi linear $y = x - 1$ dengan fungsi kuadrat $y = x^2 - 5x + 4$.
8. Tentukan semua titik potong grafik fungsi kuadrat $y = x^2 - 6x + 4$ dengan fungsi kuadrat $y = x^2 - 8x$.
9. **Tantangan.** Tentukan nilai a dan b agar grafik fungsi linear $y = ax + b$ memotong grafik fungsi kuadrat $y = x^2 - 4x + 2$ tepat pada satu titik koordinat yakni $(3, -1)$. (Kalau diperlukan dapat menggunakan grafik).
10. Dari fungsi kuadrat $y = 2x^2 - 12x + 16$ akan dibuat suatu segitiga. Titik-titik sudut segitiga tersebut merupakan titik potong sumbu- x dan titik puncak. Tentukan luas segitiga tersebut.

2.5

Aplikasi Fungsi Kuadrat

Pada sub-bab ini kamu akan mempelajari beberapa aplikasi fungsi kuadrat dalam kehidupan sehari-hari.



Pertanyaan Penting

Bagaimana aplikasi fungsi kuadrat pada kehidupan nyata?

Kegiatan 1

Lompat Trampolin

Lompat trampoline adalah sebuah permainan yang membuat seseorang terlemparkan ke udara dengan menggunakan trampolin **seperti yang terlihat pada gambar di bawah ini**. Pada suatu hari diadakan suatu kompetisi lompat trampoline dengan peserta lompatan tertinggi akan keluar menjadi pemenang. Untuk menentukan tinggi lompatan, panitia menyiapkan suatu alat ukur berupa penggaris dengan ukuran 5 meter yang dipasang secara vertikal di sebelah trampolin sehingga tinggi dari lompatan peserta bisa dilihat dari penggaris ini. Namun dengan menggunakan metode ini panitia mengalami masalah yaitu ketika ada peserta yang lompatannya melebihi 5 meter. Untuk menyelesaikan hal ini lakukanlah kegiatan di bawah ini sebagai simulasi.



Sumber: <http://www.sekolah123.com>



Ayo Kita Mencoba

1. Siapkan penggaris berukuran 100 cm atau 30 cm.
2. Siapkan stop watch atau jam tangan atau jam dinding.
3. Siapkan koin atau benda kecil yang bisa dilempar ke atas.
4. Buatlah kelompok minimal terdiri atas tiga orang yang akan bertugas untuk melempar koin, mengamati uji coba, dan mencatat.
5. Letakkan penggaris secara vertikal dan bilangan nol letakkan pada posisi di bawah.



6. Lemparlah koin atau benda kecil yang kamu siapkan dengan posisi lemparannya di titik nol pada penggaris.
7. Amati waktu yang diperlukan koin untuk mencapai tinggi 100 cm atau 30 cm (sesuaikan dengan penggaris yang kamu bawa).
8. Lakukan kegiatan ini sebanyak 10 kali dan isi tabel berikut ini.

Percobaan ke-	Waktu yang diperlukan untuk mencapai 100 cm atau 30 cm
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
6.	
7.	
8.	
9.	
10.	



Ayo Kita Amati

Pada teori fisika terdapat persamaan yang berhubungan dengan kegiatan di atas, yaitu

$$h(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

dengan h menyatakan tinggi benda, v_0 menyatakan kecepatan awal

atau kecepatan disaat waktu sama dengan nol, t menyatakan waktu dan g menyatakan koefisien dalam gaya gravitasi yang bernilai 9,8. Dari kegiatan di atas informasi apa saja yang bisa kamu dapat tentukan dan beri penjelasannya?



Ayo Kita Simpulkan

Tentukan hubungan antara Kegiatan 1 dengan permasalahan panitia lompat trampolin di atas. Dan bagaimana pemecahan masalahnya.

Kegiatan 2

Membuat Balok

Seorang pengusaha es ingin membuat cetakan untuk es. Untuk itu dia menyediakan selembar kayu berukuran 2,5 meter \times 1 meter. Dengan kayu ini dia ingin membentuk cetakan berbentuk balok dengan tinggi 1 meter tanpa alas dan tutup. Sebagai pengusaha dia ingin menghasilkan es semaksimal mungkin. Selesaikan permasalahan ini dengan melakukan kegiatan berikut.



Ayo Kita Mencoba

1. Siapkan kertas karton berukuran 25 cm \times 10 cm.
2. Buatlah balok atau kubus tanpa alas dan tutup dengan tinggi 10 cm dari kertas tersebut dengan cara melipat seperti pada contoh gambar berikut ini.



Sumber: Dokumen Kemdikbud

3. Hitunglah volume balok yang kamu buat.
4. Lakukan kegiatan ini sebanyak sepuluh kali dengan menggunakan kertas yang sama, tetapi ukuran baloknya berbeda.

5. Isilah tabel berikut ini.

Balok ke-	Volume balok
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
6.	
7.	
8.	
9.	
10.	



*Ayo Kita
Menalar*

Dari kesepuluh balok yang kamu buat, balok nomor berapakah yang mempunyai volume terbesar? Mungkinkah dibuat balok lain dengan volume lebih besar daripada volume balok tersebut?

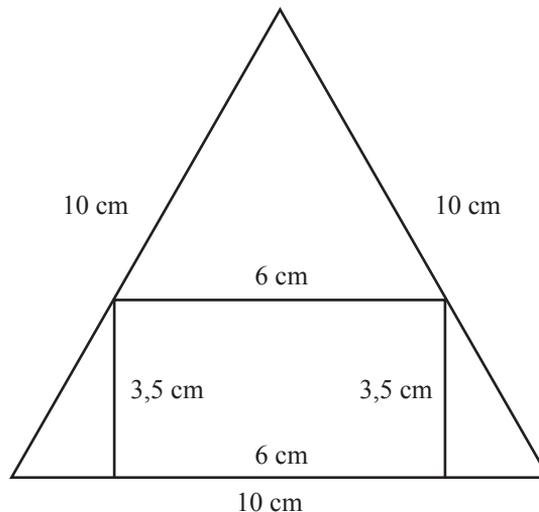


*Ayo Kita
Simpulkan*

Tentukan hubungan hasil dari Kegiatan 2 di atas dengan kasus yang ada pada Kegiatan 2 ini. Bagaimana kamu menyelesaikan kasus yang dihadapi oleh pengusaha tersebut?

Kegiatan 3**Membuat Persegi Panjang**

Seorang pengusaha emas mendapatkan pesanan 10 lempeng emas berbentuk segitiga sama sisi dengan ukuran sisinya adalah 10 cm dengan harga Rp100.000 per cm^2 . Akibat dari produksi ini, bahan untuk pembuatan emas yang dia miliki telah habis. Selanjutnya ternyata ada kabar yang mengejutkan yaitu si pembeli tidak ingin membeli emas berbentuk segitiga namun dia ingin membeli emas berbentuk persegi panjang sebanyak 10 dengan ukuran yang sama dan dia akan membayarnya dengan harga dua kali lipat dari harga Rp200.000 per cm^2 . Karena bahannya sudah habis maka si pengusaha harus memotong emas berbentuk segitiga menjadi persegi panjang. Karena si pengusaha menginginkan hasil penjualan emas tersebut semaksimal mungkin, dia harus membuat emas berbentuk persegi panjang dengan luas maksimal. Selesaikan permasalahan ini dengan melakukan kegiatan berikut.



*Ayo Kita
Mencoba*

1. Siapkan kertas karton.
2. Buatlah segitiga sama sisi dengan ukuran sisi 10 cm.
3. Buatlah persegi panjang di dalam segitiga tersebut, seperti pada gambar di atas.
4. Hitunglah luas dari persegi panjang tersebut.
5. Lakukan kegiatan ini sebanyak sepuluh kali.

6. Isilah tabel berikut ini

Persegi Panjang ke-	Luas Persegi Panjang
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
6.	
7.	
8.	
9.	
10.	



Ayo Kita Menalar

Dari kesepuluh persegi panjang yang kamu buat, persegi panjang nomer berapakah yang mempunyai luas terbesar? Mungkinkah dibuat persegi panjang yang lain dengan luas lebih besar daripada luas persegi panjang tersebut? Hubungkan hasil dari Kegiatan 3 ini dengan kasus yang ada pada Kegiatan 3 ini! Bagaimana kamu menyelesaikan kasus yang dihadapi oleh pengusaha tersebut?



Ayo Kita Berbagi

Carilah aplikasi fungsi kuadrat yang ada pada kehidupanmu sehari-hari, lalu presentasikan di depan kelas.



Ayo Kita Menanya

Buatlah pertanyaan dari hasil diskusi di atas.



Materi Esensi 2.5

Aplikasi Fungsi Kuadrat

Berikut langkah-langkah untuk menyelesaikan masalah optimalisasi fungsi kuadrat.

Langkah 1. Tentukan variabel yang akan dioptimalisasi yaitu y dan variabel yang bebas yaitu x .

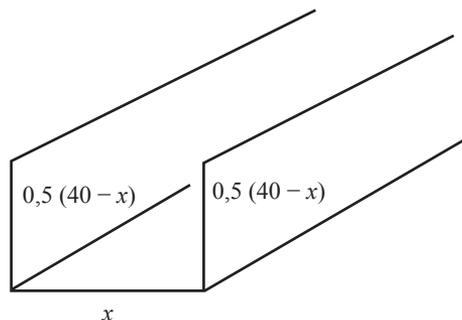
Langkah 2. Jika model $y = ax^2 + bx + c$ tidak diketahui maka bentuklah model $y = ax^2 + bx + c$ dari permasalahan.

Langkah 3. Tentukan nilai optimum dari model yang didapatkan pada Langkah 2.

Contoh 1

Tukang Talang Air

Pekerjaan Pak Suradi adalah pembuat Talang Air. Ia mendapat pesanan membuat sebuah Talang Air dari lembaran seng yang lebarnya 40 cm dengan cara melipat lebarnya atas tiga bagian seperti terlihat pada **Gambar di bawah ini**. Tentukan nilai x supaya volume dari talang maksimum.



Alternatif Penyelesaian:

Diketahui : Lembaran seng yang lebarnya 40 cm akan dibuat talang seperti **gambar di atas**.

Ditanya : Ukuran talang supaya volumenya maksimum

Penyelesaian:

Langkah 1. Menentukan variabel yang akan dioptimalisasi yaitu y dan variabel yang bebas yaitu x

Variabel y dalam kasus ini adalah luas sisi talang dan variabel x seperti terlihat pada gambar

Langkah 2. Model permasalahan ini adalah $y = x(0,5(40 - x)) = 20x - \frac{1}{2}x^2$ yakni

$$a = -\frac{1}{2}, b = 20 \text{ dan } c = 0$$

Langkah 3. Agar y optimum maka nilai x adalah $-\frac{b}{2a} = -\frac{20}{2\left(-\frac{1}{2}\right)} = -20 \text{ cm}$.

Contoh 2

Tinggi Balon Udara

Tinggi dari balon udara dalam waktu x dapat dinyatakan dalam bentuk fungsi $f(x) = -16x^2 + 112x - 91$. Tentukan tinggi maksimum balon udara.

Alternatif Penyelesaian:

Diketahui : Fungsi $f(x) = -16x^2 + 112x - 91$ merupakan tinggi balon udara

Ditanya : Tinggi maksimum balon udara

Penyelesaian :

Langkah 1. Tentukan variabel yang akan dioptimalisasi; yaitu, y dan variabel yang bebas; yaitu x

Variabel y dalam kasus ini adalah $f(x)$; yaitu fungsi tinggi balon

Langkah 2. Model $f(x) = -16x^2 + 112x - 91$

Langkah 3. Tinggi maksimum

$$y_o = -\frac{D}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{(112)^2 - 4(-16)(-91)}{4(-16)} = -\frac{6720}{-64} = 105 \text{ meter}$$

Contoh 3

Luas Kebun

Seorang tukang kebun ingin memagari kebun yang dia miliki. Dia hanya bisa memagari kebun dengan keliling 100 m. Jika pagar yang diinginkan berbentuk persegi panjang, Berapa luas maksimum kebun yang bisa dipagari?

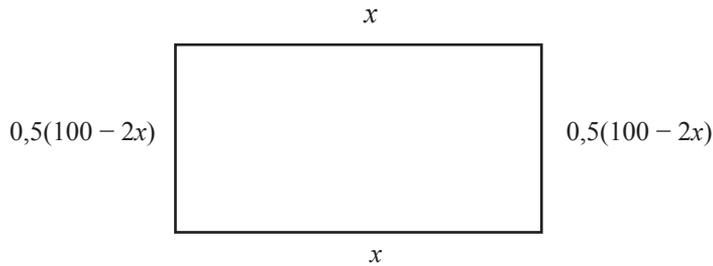
Alternatif Penyelesaian:

Diketahui : Diketahui keliling kebun yang akan dipagari 100 meter

Ditanya : Luas maksimum kebun yang akan dipagari

Penyelesaian:





Berdasarkan yang diketahui yaitu keliling adalah 100 dan dimisalkan x panjang persegi panjang maka kebun tersebut dapat digambar seperti di atas.

Langkah 1. Menentukan variabel yang akan dioptimalisasi yaitu y dan variabel yang bebas yaitu x

Variabel y dalam kasus ini adalah luas persegipanjang pada **gambar di atas**.

Langkah 2. Model dalam kasus ini adalah $y = x(0,5(100 - 2x)) = 50x - x^2$

Langkah 3. Luas maksimum

$$y_0 = -\frac{D}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{(50)^2 - 4(-1)(0)}{4(-1)} = -\frac{2500}{-4} = 625 \text{ meter}$$



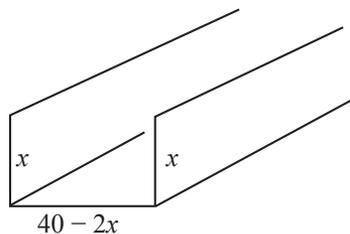
**Ayo Kita
Simpulkan**

Berdasarkan contoh di atas, tuliskan langkah-langkah untuk menyelesaikan masalah optimalisasi fungsi kuadrat.



**Ayo Kita
Tinjau Ulang**

1. Pada Contoh 1, bagaimana ukuran talang jika bentuk gambarnya sebagai berikut? Apakah menghasilkan hal yang sama?



2. Pada Contoh 2, bagaimana jika $f(x) = -16x^2 + 112x - 111$? Apa yang terjadi? Bagaimana hal itu bisa terjadi? Jelaskan?

Latihan 2.5

Aplikasi Fungsi Kuadrat

1. Suatu persegi panjang kelilingnya 60 cm. Tentukan ukuran persegi panjang agar mempunyai luas maksimum.
2. Sebuah segitiga siku-siku jumlah kedua sisi siku-sikunya adalah 50 cm. Tentukan ukuran segitiga siku-siku agar mempunyai luas maksimum.
3. Seorang siswa memotong selembar kain. Kain hasil potongannya berbentuk persegi panjang dengan keliling 80 cm. Apabila siswa tersebut berharap mendapatkan kain hasil potongan mempunyai luas maksimum, tentukan panjang dan lebar kain.
4. Sebuah peluru ditembakkan vertikal ke atas. Tinggi peluru h (dalam meter) sebagai fungsi waktu t (dalam detik) dirumuskan dengan $h(t) = -4t^2 + 40t$. Tentukan tinggi maksimum yang dapat dicapai peluru dan waktu yang diperlukan.

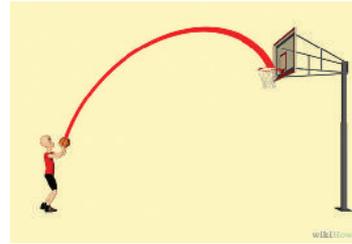
5. Diketahui bahwa tinggi Jam Gadang yang ada di Sumatera adalah 26 meter. Tentukan pemecahan masalah berikut ini: (Petunjuk: Rumus fisika untuk benda yang dijatuhkan pada ketinggian tertentu adalah $s = s_0 - v_0 t + 5 t^2$ dan untuk benda yang dilempar ke atas adalah $h = h_0 + v_0 t - 5 t^2$ dengan s adalah jarak benda yang dijatuhkan terhadap posisi awal benda (meter), h adalah jarak benda yang dilempar terhadap posisi awal benda (meter), t adalah waktu (detik), s_0 dan h_0 adalah ketinggian awal, dan v_0 adalah kecepatan awal benda (m/s))



Sumber: www.indonesia.travel

- a. Pada suatu hari ada seseorang yang menjatuhkan apel dari atas gedung Jam Gadang. Jika diharapkan apel tiba di tanah pada 0,7 detik setelah pelepasan apel, tentukan kecepatan awal apel.
- b. Pada suatu hari ada seseorang yang melempar apel ke atas. Jika orang tersebut menginginkan tinggi lemparannya tersebut tepat sama dengan tinggi gedung Jam Gadang. Tentukan kecepatan awal yang harus diberikan orang tersebut pada saat melempar apel.

6. Seorang pemain bola basket mempunyai tinggi 170 cm. Sedangkan tinggi keranjang adalah 3 meter. Pemain basket tersebut melempar bola basket sejauh 4 meter dari posisi tiang keranjang dan posisi awal bola berada tepat di atas kepala pemain. Ternyata lemparannya mempunyai tinggi maksimum 4,5 meter dan secara horisontal berjarak 2,5 meter dari pemain. Jika lemparannya membentuk parabola tentukan apakah bola tersebut masuk kedalam keranjang?



Sumber: <http://www.wikihow.com>

7. Seorang tukang bangunan mendapat pesanan membuat air mancur yang diletakkan di pusat kolam kecil yang berbentuk lingkaran. Pemesan menginginkan luas kolamnya adalah 10 m². Jika tinggi maksimum dari air mancur adalah 2 meter dan air mancurnya harus jatuh tepat ditepian kolam maka tentukan persamaan kuadrat dari air mancur.

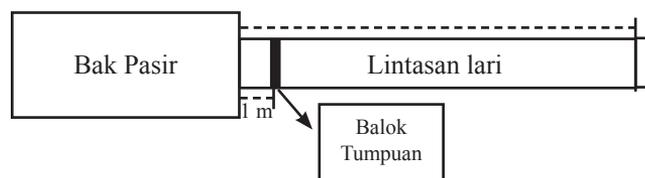


Sumber: Dokumen Kemdikbud

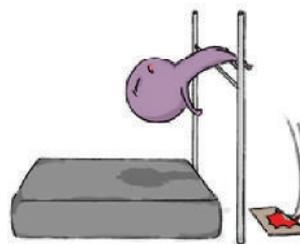
8. Seorang atlet lompat jauh sedang mengadakan latihan. Pada saat latihan dia mengambil awalan lari dengan kecepatan tertentu dan pada saat di balok tumpuan kecepatannya kira-kira 2.5 m/s kemudian pada saat itu juga dia melompat dengan sudut 30°. Tentukan jarak atlet tersebut dengan balok tumpuan ketika dia sampai ditanah? (Petunjuk: Rumus fisika untuk jarak vertikal (tinggi) yang bergantung terhadap waktu dengan sudut awal 30° adalah $h = \frac{1}{2} v_0 t - 5t^2$ dan jarak horisontal yang bergantung pada waktu adalah $s = \frac{1}{2} \sqrt{3} v_0 t$ dengan t adalah waktu (detik), h adalah tinggi lompatan pada saat t (m), s adalah jarak horisontal pada saat t (m) dan v_0 adalah kecepatan awal)



Sumber: elgisha.wordpress.com



9. Seorang atlet lompat tinggi sedang mengadakan latihan. Pada saat latihan dia mengambil awalan lari dengan kecepatan tertentu dan dia melompat dengan sudut mendekati 90° pada saat jaraknya sangat dekat sekali dengan tiang lompat. Satu detik setelah dia melompat, tubuhnya mencapai tanah. Tentukan kecepatan lari sesaat sebelum dia melompat supaya lompatannya bisa melewati tinggi mistar lompat yaitu 2 meter! (Petunjuk: Rumus fisika untuk tinggi yang bergantung terhadap waktu dengan sudut awal lompatan mendekati 90° adalah $h = \frac{1}{2} v_0 t - 5t^2$ dengan t adalah waktu (detik), h adalah tinggi lompatan pada saat t (m) dan v_0 adalah kecepatan awal)



Sumber: Dokumen Kemdikbud

terhadap waktu dengan sudut awal lompatan mendekati 90° adalah $h = \frac{1}{2} v_0 t - 5t^2$ dengan t adalah waktu (detik), h adalah tinggi lompatan pada saat t (m) dan v_0 adalah kecepatan awal)



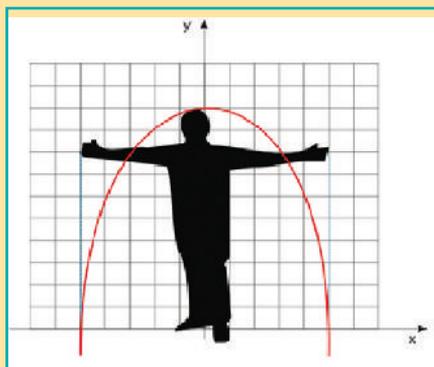
Proyek 2

Ukurlah tinggi badanmu (h) dan panjang jangkauan kedua tanganmu (j). Nyatakan keduanya dalam satuan cm. Tugasmu adalah membuat fungsi kuadrat berdasarkan informasi tinggi dan jangkauan tangan tanganmu sebagai berikut.

1. Grafik fungsi kuadrat tersebut memiliki titik puncak pada koordinat $(0, h)$.
2. Grafik fungsi kuadrat tersebut memotong sumbu- x pada koordinat $(\frac{j}{2}, 0)$ dan $(-\frac{j}{2}, 0)$

$$(\frac{j}{2}, 0) \text{ dan } (-\frac{j}{2}, 0)$$

Ilustrasinya dapat dilihat pada gambar di bawah ini.



Sumber: Dokumen Kemdikbud

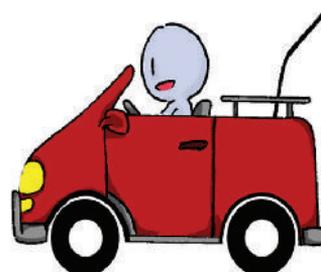
1. Jika p dan q adalah akar-akar persamaan $x^2 - 5x - 1 = 0$, tentukan persamaan kuadrat baru yang akar-akarnya $2p + 1$ dan $2q + 1$.
2. Diketahui akar-akar persamaan kuadrat $2x^2 - 4x + 1 = 0$ adalah m dan n . Tentukan persamaan kuadrat baru yang akar-akarnya $m + n$ dan $m \cdot n$.
3. Persamaan $2x^2 + qx + (q - 1) = 0$ mempunyai akar-akar x_1 dan x_2 .
Jika $x_1^2 + x_2^2 = 4$, tentukan nilai q !
4. Persamaan $(1 - m)x^2 + (8 - 2m)x + 12 = 0$ mempunyai akar kembar. Berapa m ?
5. Jika nilai diskriminan persamaan kuadrat $2x^2 - 9x + c = 0$ adalah 121, tentukan nilai c .
6. Jumlah dua bilangan cacah adalah 12. Jika hasil kali dua bilangan itu 35, tentukan kedua bilangan cacah yang dimaksud.
7. Persamaan kuadrat $x^2 - 2x + 7 = 0$ mempunyai akar-akar x_1 dan x_2 . Persamaan kuadrat yang akar-akarnya $x_1 - 2$ dan $x_2 - 2$ adalah
8. Akar-akar persamaan $2x^2 - 6x + 2m - 1 = 0$ adalah α dan β . Jika $\alpha = 2\beta$, maka nilai m adalah
9. Jika p dan q adalah akar-akar persamaan $x^2 - 5x - 1 = 0$, maka persamaan kuadrat baru yang akar-akarnya $2p + 1$ dan $2q + 1$ adalah
10. Akar-akar persamaan kuadrat $x^2 + (a - 1)x + 2 = 0$ adalah α dan β . Jika $\alpha = 2\beta$ dan $a > 0$, tentukan nilai a .
11. Gambarkan grafik fungsi kuadrat berikut.
 - a. $f(x) = x^2 + x + 3$
 - b. $f(x) = x^2 - 6x + 8$
 - c. $f(x) = 2x^2 + 3x + 2$
12. Tentukan fungsi kuadrat yang grafiknya memotong sumbu- x pada titik koordinat $(-2, 0)$ dan $(5, 0)$ serta memotong sumbu- y pada titik koordinat $(0, -20)$.

13. Tentukan fungsi kuadrat yang grafiknya memiliki titik puncak pada titik koordinat (1, 5) serta melalui titik koordinat (0, 7).
14. Tentukan fungsi kuadrat yang grafiknya melalui titik koordinat (0, 5), (1, 6) dan (-1, 12).
15. Tentukan fungsi kuadrat yang grafiknya melalui titik koordinat (0, -2) serta memiliki sumbu simetri $x = -\frac{1}{2}$.
16. **Analisis kesalahan.** Lily menentukan fungsi kuadrat yang memiliki akar $x = 3$ dan $x = -2$ serta grafiknya melalui titik koordinat (0, 12). Fungsi kuadrat yang diperoleh adalah $y = -2x^2 - 2x + 12$. Tentukan kesalahan yang dilakukan oleh Lily.
17. **Tantangan.** Tentukan banyaknya fungsi kuadrat $y = ax^2 + bx + c$ yang memiliki dua akar berbeda dengan $1 \leq a, b, c \leq 6$.
18. Tentukan titik potong grafik fungsi linear $y = 2x + 5$ dengan grafik fungsi kuadrat $y = 2x^2 - 4x + 9$.
19. Tentukan titik potong grafik fungsi kuadrat $y = 2x^2 + 4x + 1$ dengan grafik fungsi kuadrat $y = x^2 + 9x + 7$.
20. **Tantangan.** Apakah mungkin garis horisontal memotong grafik fungsi kuadrat $y = ax^2 + bx + c$ tepat pada satu titik koordinat?
21. Tentukan sumbu simetri dan nilai optimum dari grafik fungsi di bawah ini.
 - a. $y = 3x^2 - 7x$
 - b. $y = 8x^2 - 16x + 2$
 - c. $y = 6x^2 + 20x + 18$
22. Sketsalah grafik fungsi berikut ini.
 - a. $y = 6x^2 + 5x + 7$
 - b. $y = 7x^2 - 3x + 2$
23. Diketahui suatu barisan 3, 11, 26,.... Suku ke- n dari barisan tersebut dapat dihitung dengan rumus $U_n = an^2 + bn + c$. Tentukan barisan ke-100.

24. Diketahui suatu barisan barisan 5, 19, 29,.... Suku ke- n dari barisan tersebut dapat dihitung dengan rumus $U_n = an^2 + bn + c$. Tentukan nilai maksimum dari barisan tersebut.

25. Jika fungsi $y = ax^2 + 3x + 5a$ mempunyai nilai maksimum 0, maka tentukan a .

26. Seorang sopir mengemudikan mobilnya dengan kecepatan konstan 20 m/s. Tiba-tiba dia melihat orang yang sedang berdiri di tengah jalan yang berjarak 15 m di depan mobilnya. Sopir tersebut mengerem mobilnya dengan perlambatan 5 m/s². Apakah mobil tersebut menabrak orang didepannya itu? (Petunjuk: rumus

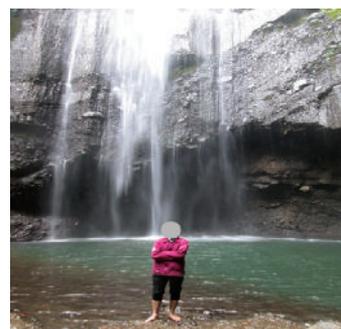


Sumber: Dokumen Kemdikbud

fisika untuk kasus ini adalah $s = v_0 t - \frac{1}{2} at^2$ dengan

t menyatakan waktu (detik) mulai dari pengereman, s jarak tempuh pada saat t , v_0 menyatakan kecepatan mobil dan a menyatakan perlambata mobil)

27. Air Terjun Madakaripura terletak di Kecamatan Lumbang, Probolinggo merupakan salah satu air terjun di kawasan Taman Nasional Bromo Tengger Semeru. Tinggi dari air terjun ini adalah 200 m. Pada suatu hari ada seseorang yang melepas ikan tepat dari atas air terjun. Tentukan berapa waktu yang diperlukan ikan tersebut untuk mencapai dasar air terjun? Jika persamaan jarak tempuh dari ikan tersebut adalah $y = y_0 - 24t^2$ dengan y jarak tempuh, y_0 adalah tinggi air terjun dan t waktu tempuh.



Sumber: Dokumen Kemdikbud

28. Sebuah roket mempunyai dua bahan bakar yaitu salah satunya berada pada pada bagian ekor. Pada ketinggian tertentu bahan bakar ini akan dibuang untuk mengurangi bobot. Roket mempunyai rumusan suatu persamaan $y = 300t - 5t^2$ dengan t adalah waktu (detik) dan y menyatakan tinggi roket. Jika ekor roket dibuang pada saat mencapai tinggi maksimum, berapa tinggi roket pada saat membuang bahan bakarnya?



Sumber: <http://idkf.bogor.net>

29.



Sumber: Dokumen Kemdikbud

Seorang atlet tolak peluru mempunyai tinggi 160 cm. Atlet ini melempar peluru tepat di atas kepalanya. Ternyata lemparannya mempunyai tinggi maksimum 4,5 meter dan secara horisontal berjarak 2,5 meter dari pemain. Jika lemparannya membentuk parabola tentukan jarak yang dicapai peluru tersebut!

30.



Sumber: <http://cdn.ad4msan.com>

Balon udara jatuh dari ketinggian 32 kaki. Diberikan fungsi $h = -32t^2 + 32$ dengan h adalah tinggi balon setelah t detik. Kapan balon ini mencapai tanah?



Bab III

Transformasi



Kata Kunci

- Refleksi
- Translasi
- Rotasi
- Dilatasi



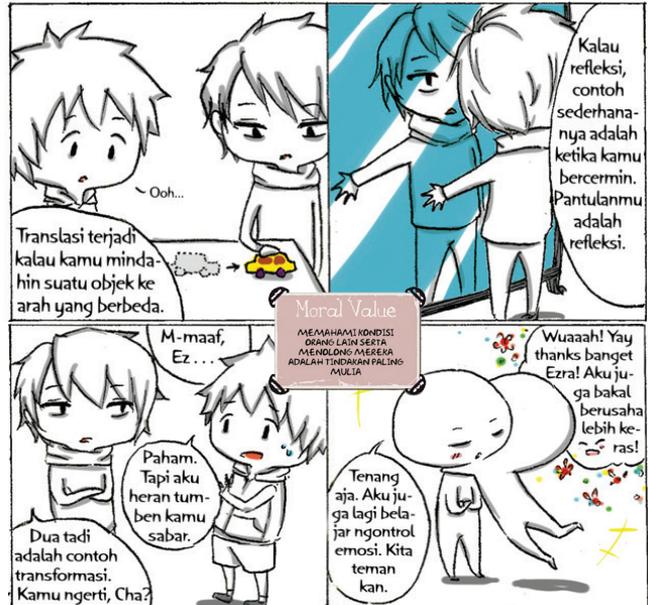
Kompetensi Dasar

- 3.5 Menjelaskan transformasi geometri (refleksi, translasi, rotasi, dan dilatasi) yang dihubungkan dengan masalah kontekstual.
- 4.5 Menyelesaikan masalah kontekstual yang berkaitan dengan transformasi geometri (refleksi, translasi, rotasi, dan dilatasi).



Pengalaman Belajar

1. Menggambar bayangan benda hasil refleksi pada cermin.
2. Mengenali garis simetri serta menentukan banyak simetri lipat suatu benda.
3. Menggambar bayangan benda hasil transformasi (refleksi, translasi, rotasi, atau dilatasi).
4. Menentukan koordinat bayangan benda hasil transformasi (refleksi, translasi, rotasi, atau dilatasi) pada koordinat kartesius.
5. Menentukan pasangan bilangan translasi yang menggerakkan bangun datar maupun titik pada koordinat kartesius.
6. Menentukan apakah dilatasi merupakan pembesaran atau pengecilan.
7. Menentukan faktor skala untuk dilatasi yang diberikan.
8. Menggambar dan menentukan koordinat bayangan hasil transformasi berulang.
9. Menerapkan transformasi dalam masalah nyata (seni dan alam).

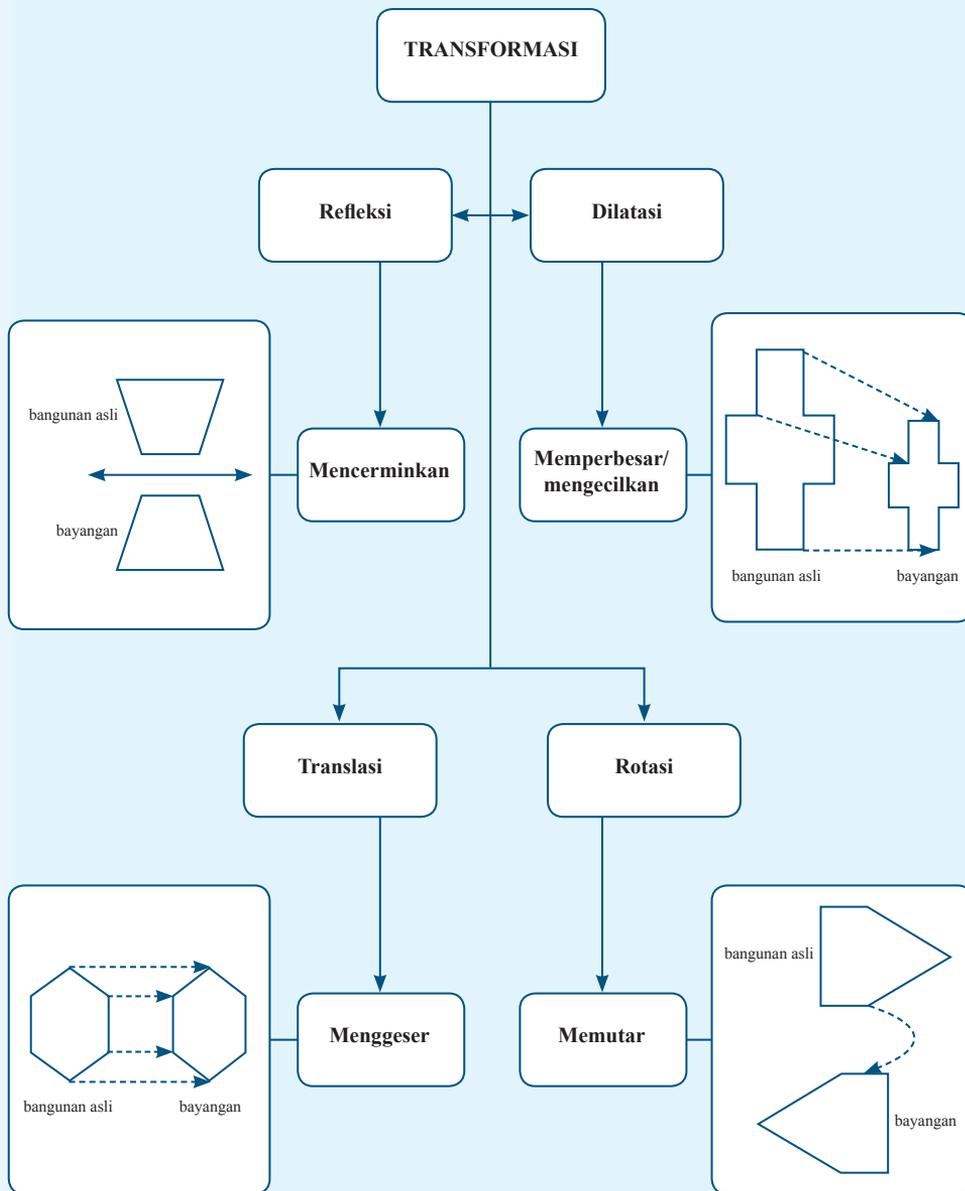


Sumber: Dokumen Kemdikbud

Apakah kalian pernah memindahkan atau menggeser suatu benda dari suatu tempat ke tempat lainnya? Ketika kalian memindahkan suatu benda ke tempat lain maka bentuk benda tetaplah seperti semula, hanya saja posisi dari benda telah berubah dari posisi awalnya. Apakah kalian pernah memperhatikan bentuk dari bayangan kalian saat bercermin? Bagaimana caramu untuk menggambar bayangan benda hasil suatu pencerminan?

Pernahkah kamu memperhatikan suatu roda sepeda yang sedang berputar searah maupun berlawanan dengan jarum jam? Apakah roda sepeda tersebut sedang berotasi? Hal-hal apa saja yang mempengaruhi rotasi suatu benda? Apakah kamu mengetahui apa itu dilatasi pada suatu benda? Faktor apa saja yang mempengaruhi dilatasi? Kamu akan mengetahui jawaban dari setiap pertanyaan dan permasalahan tersebut dengan menggunakan transformasi geometri. Konsep mengenai transformasi pada benda akan kita pelajari bersama di Bab 3 ini.







Sumber: <https://en.wikipedia.org/wiki/Alhazen>

Ibnu al-Haytham

Ibnu al-Haytham adalah salah satu saintis besar yang hidup antara tahun 965-1038 M, tepatnya lahir pada 1 Juli 965 di Bashra, Irak. Nama lengkapnya Abū 'Alī al-Ḥasan ibn al-Ḥasan Ibn al-Haytham. Masyarakat barat mengenalnya dengan nama Alhazen. Ibn al-Haytham hidup di masa Daulah Abbasiyah, salah satu dinasti muslim besar yang pernah berkuasa di Timur Tengah hingga Eropa.

Alhazen seorang *prolific* tulen. Karyanya mencapai lebih dari 185 buah, ia juga seorang *polymath* sejati sebab karyanya meliputi berbagai bidang keilmuan seperti matematika, fisika, astronomi, metafisika, anatomi tubuh, akuntansi hingga kaligrafi. Namanya sering dikaitkan dengan *camera obscura* yang merupakan cikal bakal kamera saat ini. Ia memperkenalkan nama bagian-bagian mata yang kita kenal melalui terjemah Latinnya seperti *vitreous humour*, *aqueous humour*, retina, kornea, dan lain-lain. Ia meredakan polemik beratus

tahun lamanya tentang teori penglihatan, memunculkan permasalahan klasik dalam matematika di mana dunia mengenalnya dengan *Alhazen's Problem* yang baru dapat dipecahkan secara eksak pada 1997 oleh matematikawan Oxford Peter Neumann.

Karya Ibnu al-Haytham di bidang optik pada masa itu seakan melampaui jaman. Dari eksperimen yang dilakukan, Ibn al-Haytham berkesimpulan bahwa cahaya merambat lurus. Ia mengembangkan konsep pemantulan pada cermin parabolik. Ia juga melakukan eksperimen untuk pembiasan. Konvensi “sudut datang” dan “sudut bias” adalah temuannya, dan hingga kini masih digunakan dalam hukum pembiasan Snellius. Ibn al-Haytham jugalah yang menyatakan bahwa ketika cahaya memasuki suatu medium yang lebih rapat, cahaya tersebut bergerak lebih lambat. Pendapatnya tentang pembiasan itu digunakannya untuk menjelaskan fenomena fajar/senja, dengan menyatakan bahwa fajar/senja terjadi karena matahari berada di bawah ufuk (horizon) sehingga cahayanya dibiaskan oleh atmosfer. Karya Ibnu al-Haytham dalam bidang optik ini berkaitan erat dengan salah satu aplikasi matematika di bidang transformasi geometri, yaitu refleksi.

Sumber: Buku *Ibn al-Haytham Sang Pembawa Cahaya Sains (Usep Muhamad Ishaq)*, Wikipedia.

Hikmah yang bisa diambil

1. Kita harus terus berusaha untuk mencapai keberhasilan.
2. Kita harus mau dan mampu melakukan pembuktian-pembuktian tentang fenomena alam sekitar yang merupakan bukti kekuasaan Tuhan melalui keilmuan yang diketahui manusia.





Pertanyaan Penting

Bagaimana caramu untuk menggambar bayangan hasil pencerminan suatu benda? Bagaimana caramu menentukan koordinat bayangan hasil pencerminan pada koordinat kartesius? Supaya kamu dapat mengetahui dan memahami jawaban pertanyaan di atas lakukanlah kegiatan-kegiatan di bawah ini.

Kegiatan 1

Pencerminan Suatu Benda

Ketika melihat foto bangunan di samping, maka kamu akan melihat bayangan dari bangunan tersebut pada permukaan air. Perhatikan bahwa setiap titik dari bangunan asli di atas garis air memiliki titik yang bersesuaian dengan bayangannya pada air. Jarak dari semua titik pada bangunan asli ke permukaan air sama besarnya dengan jarak dari bayangan titik tersebut ke permukaan air. Bayangan dari bangunan tersebut pada air dikenal dengan **refleksi (pencerminan)** bangunan pada air.



Sumber: <https://pixabay.com>

Gambar 3.1 Foto Pencerminan Bangunan pada Air

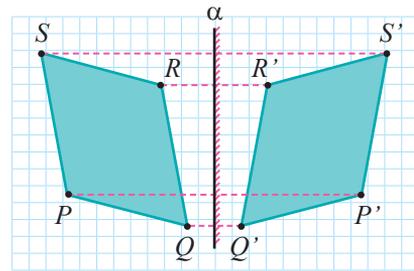


Apakah kamu ingat saat bercermin? Pada saat mendekati cermin, tampak bayanganmu juga akan mendekati cermin. Ketika kamu bergerak menjauhi cermin, bayanganmu juga akan menjauhi cermin.

Sifat bayangan benda yang dibentuk oleh pencerminan di antaranya sebagai berikut.

- Bayangan suatu bangun yang dicerminkan memiliki bentuk dan ukuran yang sama dengan bangun aslinya.
- Jarak bayangan ke cermin sama dengan jarak benda aslinya ke cermin.
- Bayangan bangun pada cermin saling berhadapan dengan bangun aslinya.

Gambar di samping merupakan contoh pencerminan (refleksi) dari segi empat $PQRS$ terhadap garis α sehingga menghasilkan bayangan yaitu segi empat $P'Q'R'S'$.



Berikut ini merupakan langkah-langkah untuk menggambar bayangan hasil refleksi segi empat $PQRS$ terhadap garis α .

- Langkah 1 Gambar ruas garis yang tegak lurus terhadap garis α dari P , Q , R , dan S .
- Langkah 2 Tentukan titik P' , Q' , R' , dan S' sehingga garis α tegak lurus dan membagi PP' , QQ' , RR' , dan SS' sama panjang. Titik P' , Q' , R' , dan S' merupakan bayangan titik P , Q , R , dan S .
- Langkah 3 Hubungkan titik-titik P' , Q' , R' , dan S' . Oleh karena P' , Q' , R' , dan S' merupakan bayangan dari P , Q , R , dan S yang direfleksikan oleh garis α , maka segi empat $P'Q'R'S'$ merupakan bayangan segi empat $PQRS$.



Ayo Kita Menanya

Setelah kamu mengamati contoh-contoh pencerminan (refleksi) serta cara membuat bayangan hasil pencerminan suatu bangun datar pada Kegiatan 1, sekarang buatlah pertanyaan dengan menggunakan kata pencerminan (refleksi).

Kegiatan 2

Menggambar Bayangan Hasil Pencerminan

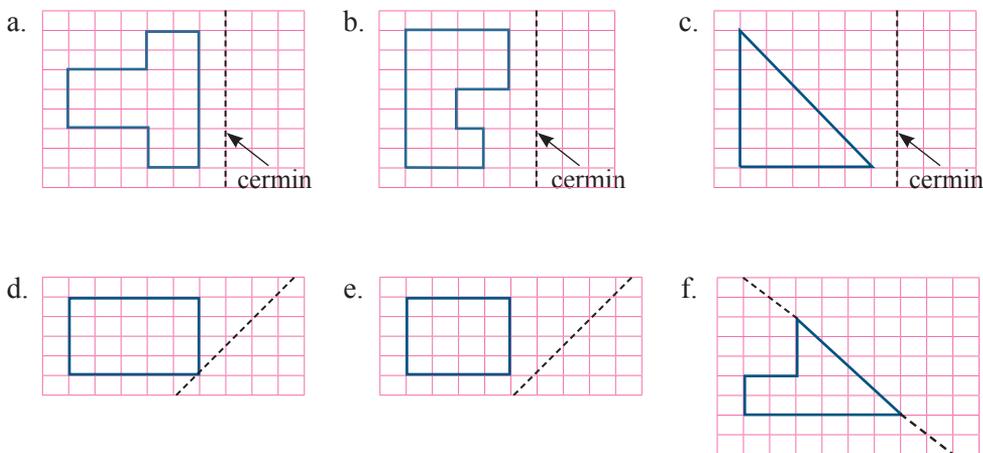


Ayo Kita Mencoba

Sediakan kertas milimeter (kertas berpetak). Lakukanlah kegiatan berikut ini.



Salinlah gambar berikut ini pada kertas berpetak yang telah kamu sediakan. Gambar bayangan dari tiap-tiap bangun datar sesuai dengan garis refleksi tiap-tiap gambar. Ikuti langkah-langkah menggambar bayangan hasil pencerminan suatu bangun datar pada Kegiatan 1.



Diskusikan dan Berbagi

Setelah kamu selesai menggambar bayangan hasil pencerminan dari tiap-tiap bangun datar, selanjutnya diskusikan hasil yang telah kamu dapatkan dengan teman sebangkumu. Periksa apakah kalian memiliki jawaban yang sama. Majulah ke depan kelas, bagikan hasil diskusimu kepada teman sekelasmu.

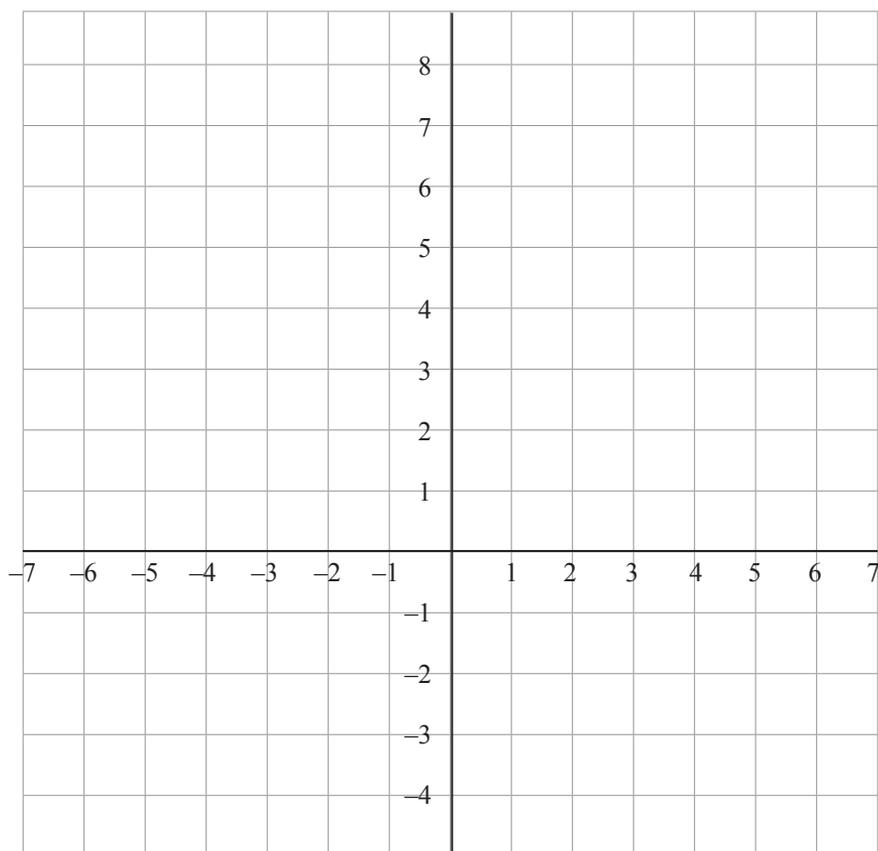
Kegiatan 3

Pencerminan pada Bidang Koordinat



Ayo Kita Mencoba

Buatlah kelompok yang terdiri atas 5 anak. Sediakan kertas karton berukuran minimal 1×1 meter, spidol, penggaris, dan 10 tutup botol minuman bekas. Pada bagian belakang tutup botol berikan selotip sehingga tutup botol tersebut dapat ditempelkan pada kertas. Gambarkan koordinat kartesius pada kertas karton dengan menggunakan spidol dan penggaris seperti gambar di samping ini. Setiap anak, secara bergantian, diberikan tugas untuk melakukan Subkegiatan 3.1 sampai dengan Subkegiatan 3.5



Sub Kegiatan 3.1

1. Letakkan tutup botol pada koordinat A (3, 4).
2. Gambar ruas garis yang tegak lurus terhadap sumbu- x dari titik A .
3. Hitung jarak titik A terhadap sumbu- x . Berapa satuan jarak titik A terhadap sumbu- x ?
4. Tentukan titik A' sehingga garis yang menghubungkan titik A dan A' (disebut garis AA') tegak lurus terhadap sumbu- x dan sumbu- x membagi garis AA' menjadi 2 bagian sama panjang. Letakkan tutup botol berikutnya pada titik A' . Berapakah koordinat titik A' ? (Keterangan: titik A' merupakan hasil pencerminan titik A terhadap sumbu- x)
5. Apakah koordinat- x dari titik A dan A' sama? Apakah koordinat- y dari titik A dan A' berlawanan?

Sub Kegiatan 3.2

1. Letakkan tutup botol pada koordinat $B(2, 3)$.
2. Gambar ruas garis yang tegak lurus terhadap sumbu- y dari titik B .
3. Hitung jarak titik B terhadap sumbu- y . Berapa satuan jarak titik B terhadap sumbu- y ?
4. Tentukan titik B' sehingga garis yang menghubungkan titik B dan B' (disebut garis BB') tegak lurus terhadap sumbu- y dan sumbu- y membagi garis BB' menjadi 2 bagian sama panjang. Letakkan tutup botol berikutnya pada titik B' . Berapakah koordinat titik B' ? (Keterangan: titik B' merupakan hasil pencerminan titik B terhadap sumbu- y).
5. Apakah koordinat- y dari titik B dan B' sama? Apakah koordinat- x dari titik B dan B' berlawanan?

Sub Kegiatan 3.3

1. Letakkan tutup botol pada koordinat $C(4, 4)$.
2. Gambar ruas garis yang tegak lurus terhadap titik asal dari titik C .
3. Hitung jarak titik C terhadap titik asal $O(0, 0)$. Berapa satuan jarak titik C terhadap titik asal $O(0, 0)$?
4. Tentukan titik C' sehingga garis yang menghubungkan titik C dan C' (disebut garis CC') tegak lurus terhadap titik asal dan membagi garis CC' menjadi 2 bagian sama panjang. Letakkan tutup botol berikutnya pada titik C' . Berapakah koordinat titik C' ? (Keterangan: titik C' merupakan hasil pencerminan titik C terhadap titik asal).
5. Apakah koordinat- x dan y dari titik C dan C' berlawanan semua?

Sub Kegiatan 3.4

1. Letakkan tutup botol pada koordinat $D(4, 5)$.
2. Gambar garis $y = x$ pada koordinat kartesius tersebut. Kemudian gambar ruas garis yang tegak lurus terhadap titik asal dari titik D .
3. Gambar ruas garis yang tegak lurus terhadap garis $y = x$ dari titik D .
4. Hitung jarak titik D terhadap garis $y = x$. Berapa satuan jarak titik D terhadap garis $y = x$?

5. Tentukan titik D' sehingga garis yang menghubungkan titik D dan D' (disebut garis DD') tegak lurus terhadap garis $y = x$ dan membagi garis DD' menjadi 2 bagian sama panjang. Letakkan tutup botol berikutnya pada titik D' . Berapakah koordinat titik D' ? (Keterangan: titik D' merupakan hasil pencerminan titik D terhadap garis $y = x$).
6. Apakah koordinat $-x$ dan y dari titik D dan D' saling berkebalikan?

Sub Kegiatan 3.5

1. Letakkan tutup botol pada koordinat $E(5, 7)$.
2. Gambar garis $y = -x$ pada koordinat kartesius tersebut. Kemudian gambar ruas garis yang tegak lurus terhadap titik asal dari titik E .
3. Gambar ruas garis yang tegak lurus terhadap garis $y = -x$ dari titik E .
4. Hitung jarak titik E terhadap garis $y = -x$. Berapa satuan jarak titik E terhadap garis $y = -x$?
5. Tentukan titik E' sehingga garis yang menghubungkan titik E dan E' (disebut garis EE') tegak lurus terhadap garis $y = -x$ dan membagi garis EE' menjadi 2 bagian sama panjang. Letakkan tutup botol berikutnya pada titik E' . Berapakah koordinat titik E' ? (Keterangan: titik E' merupakan hasil pencerminan titik E terhadap garis $y = -x$).
6. Apakah koordinat $-x$ dan y dari titik E dan E' saling berkebalikan serta berlawanan?



Ayo Kita Menanya

Setelah kamu melakukan Kegiatan 3 di atas, sekarang buatlah pertanyaan dengan menggunakan beberapa kata berikut ini: koordinat, bayangan, refleksi, sumbu- x , sumbu- y , titik asal, garis $y = x$, garis $y = -x$. Tuliskan pertanyaanmu tersebut dengan rapi pada buku tulismu.



Ayo Kita Gali Informasi

Setelah kamu melakukan Kegiatan 3 bersama teman kelompokmu, coba kamu amati koodinat hasil pencerminan pada tiap-tiap sub kegiatan. Lengkapi Tabel 3.1 berikut ini berdasarkan Kegiatan 3 yang telah kamu lakukan sebelumnya.

Tabel 3.1 Titik Koordinat Hasil Pencerminan

No.	Titik Koordinat	Pencerminan Terhadap	Titik Koordinat Bayangan
1.	$A (... , ...)$		
2.	$B (... , ...)$		
3.	$C (... , ...)$		
4.	$D (... , ...)$		
5.	$E (... , ...)$		



Dikusi dan Berbagi

Setelah kamu mengisi Tabel 3.1, jawablah pertanyaan berikut ini melalui diskusi bersama teman sekelompokmu.

Untuk sembarang titik (x, y) yang dicerminkan terhadap:

1. sumbu- x
2. sumbu- y
3. titik asal $O(0, 0)$
4. garis $y = x$
5. garis $y = -x$

bagaimana koordinat dari masing-masing bayangannya?

Tuliskan jawabanmu tersebut pada kertas dan paparkan kepada teman sekelasmu.

Kegiatan 4

Pencerminan Terhadap Garis Sejajar Sumbu- x dan Sumbu- y



Ayo Kita Mencoba

Sediakan kertas milimeter (kertas berpetak). Kemudian buatlah koordinat kartesius pada kertas tersebut. Lakukanlah kegiatan di bawah ini.

1. Gambarlah segitiga ABC dengan koordinat titik sudut $A(3, 9)$, $B(3, 3)$, dan $C(6, 3)$, kemudian gambarlah garis $y = 1$. Dengan menggunakan cara yang sama pada kegiatan-kegiatan yang telah kamu lakukan sebelumnya, gambar bayangan hasil pencerminan segitiga ABC terhadap garis $y = 1$. Bayangan hasil pencerminan tersebut selanjutnya disebut dengan segitiga ABC_1 dengan koordinat titik sudutnya antara lain A_1' , B_1' , dan C_1' .
2. Setelah kamu mendapatkan gambar bayangan hasil pencerminan segitiga ABC terhadap garis $y = 1$, selanjutnya gambar garis $x = -2$. Dengan cara yang sama, gambar bayangan hasil pencerminan segitiga ABC terhadap garis $x = -2$. Bayangan hasil pencerminan tersebut selanjutnya disebut dengan segitiga ABC_2 dengan koordinat titik sudutnya antara lain A_2' , B_2' , dan C_2' .
3. Berapakah koordinat dari A_1' , B_1' , C_1' , A_2' , B_2' , dan C_2' ?



Ayo Kita Gali Informasi

Amati koordinat bayangan hasil pencerminan segitiga ABC terhadap garis $y = 1$ dan garis $x = -2$, selanjutnya lengkapilah tabel di bawah ini.

Tabel 3.2 Koordinat Titik Sudut Awal dan Bayangan Hasil Pencerminan Terhadap Garis $y = 1$

Koordinat Awal	Koordinat Bayangan Pada Sumbu- x	Koordinat Bayangan Pada Sumbu- y
$A(3, 9)$...	$-7 = 2 \times 1 - 9$
$B(3, 3)$
$C(6, 3)$

angka 1 menunjukkan bahwa bangun segitiga ABC direfleksikan terhadap garis $y = 1$

angka 9 menunjukkan bahwa koordinat awal titik A pada sumbu- y adalah 9

Tabel 3.3 Koordinat Titik Sudut Awal dan Bayangan Hasil Pencerminan Terhadap Garis $x = 2$

Koordinat Awal	Koordinat Bayangan Pada Sumbu- x	Koordinat Bayangan Pada Sumbu- y
$A(3, 9)$	$-7 = 2 \times (-2) - 3$...
$B(3, 3)$
$C(6, 3)$

angka -2 menunjukkan bahwa bangun segitiga ABC direfleksikan terhadap garis $x = -2$

angka 3 menunjukkan bahwa koordinat awal titik A pada sumbu- x adalah 3



Dikusi dan Berbagi

Setelah kamu melakukan Kegiatan 4 di atas, jawablah pertanyaan di bawah ini melalui diskusi dengan teman sebangkumu.

1. Pada pencerminan segitiga ABC terhadap garis $y = 1$, apakah koordinat- x dari titik sudut segitiga ABC dan bayangannya sama? Menurutmu apakah jika segitiga ABC dicerminkan terhadap sembarang garis $y = h$, dengan h merupakan bilangan bulat (garis $y = h$ merupakan garis yang sejajar dengan sumbu- x) maka koordinat titik sudut pada sumbu- x dari bayangannya akan selalu sama dengan bangun aslinya?
2. Berdasarkan Kegiatan 4 dan hasil pengamatanmu pada Tabel 3.2 di atas, menurutmu bagaimana rumus untuk mendapatkan koordinat bayangan pada sumbu- y dari suatu titik yang direfleksikan terhadap garis $y = h$?
3. Pada pencerminan segitiga ABC terhadap garis $x = -2$, Apakah koordinat- y dari titik sudut segitiga ABC dan bayangannya sama? Menurutmu apakah jika segitiga ABC dicerminkan terhadap sembarang garis $x = h$, dengan h merupakan bilangan bulat (garis $x = h$ merupakan garis yang sejajar dengan sumbu- y) maka koordinat titik sudut pada sumbu- y dari bayangannya akan selalu sama dengan bangun aslinya?

4. Berdasarkan Kegiatan 4 dan hasil pengamatanmu pada Tabel 3.3 di atas, menurutmu bagaimana rumus untuk mendapatkan koordinat bayangan pada sumbu- x dari suatu titik yang direfleksikan terhadap garis $x = h$?

Tuliskan jawabanmu tersebut pada kertas dan paparkan kepada teman sekelasmu.

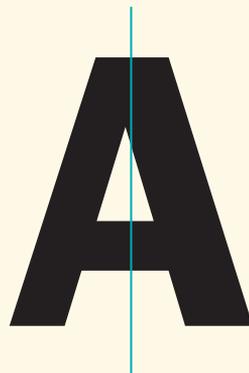
Sedikit Informasi

Simetri Lipat

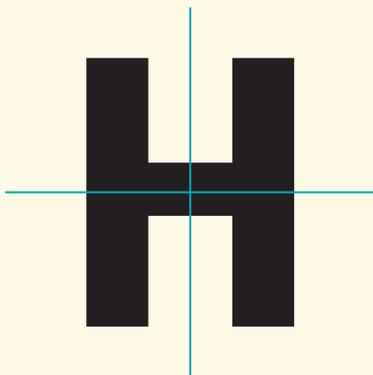
Beberapa gambar dapat dilipat sedemikian sehingga setengah bangun tersebut sama dengan bagian yang lain. Lipatan yang dimaksud merupakan garis refleksi yang disebut **garis simetri** atau **simetri lipat**.



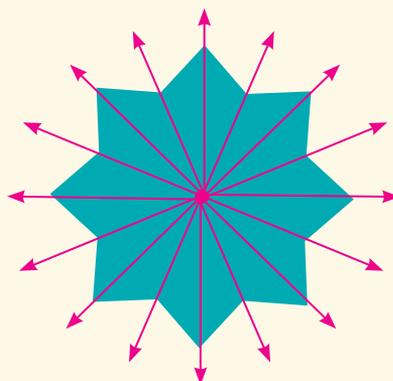
Huruf G tidak memiliki simetri lipat



Huruf A memiliki 1 simetri lipat



Huruf H memiliki 2 simetri lipat



Memiliki lebih dari 2 simetri lipat





**Ayo Kita
Menalar**

Setelah kamu melakukan Kegiatan 1 sampai dengan Kegiatan 4, jawablah pertanyaan berikut ini.

1. Tunjukkan bahwa bayangan sebuah titik yang direfleksikan terhadap titik asal sama dengan bayangan titik tersebut jika direfleksikan terhadap sumbu $-x$ dan dilanjutkan refleksi di sumbu $-y$.
2. Diketahui segitiga ABC yang titik sudutnya di $A (3, 2)$, $B (4, 4)$, dan $C (1, 3)$. Gambarlah segitiga tersebut kemudian gambar hasil bayangannya jika dicerminkan terhadap:
 - a. Sumbu $-x$
 - b. Sumbu $-y$
 - c. Titik asal $O (0,0)$
 - d. Garis $y = x$
 - e. Garis $y = -x$
 - f. Garis $y = 2$
 - g. Garis $x = 3$



**Ayo Kita
Simpulkan**

Berdasarkan Kegiatan 1, kesimpulan apa yang kamu peroleh?

Berdasarkan Kegiatan 3 dan Kegiatan 4 di atas, kesimpulan apa yang kamu peroleh? Perhatikan contoh kesimpulan berikut ini.

Berdasarkan Subkegiatan 3.1 diperoleh kesimpulan bahwa untuk sebarang titik koordinat (x, y) jika dicerminkan terhadap sumbu $-x$ maka koordinat $-x$ tetap sedangkan koordinat $-y$ berlawanan. Sehingga hasil refleksi sembarang titik (x, y) terhadap sumbu $-x$ akan menghasilkan bayangan dengan koordinat $(x, -y)$ atau dapat ditulis $(x, y) \rightarrow (x, -y)$.

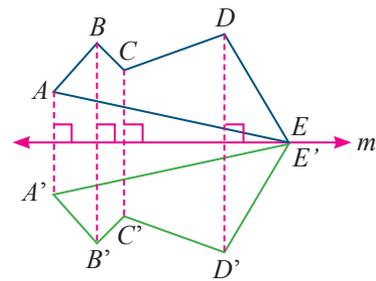
Buatlah kesimpulan seperti contoh di atas jika diketahui sebarang titik koordinat (x, y) dicerminkan terhadap sumbu $-y$, titik asal $O (0, 0)$, garis $y = x$, garis $y = -x$, garis $y = h$, dan garis $x = h$.

Materi Esensi 3.1

Pencerminan (Refleksi)

Refleksi atau pencerminan merupakan satu jenis transformasi yang memindahkan setiap titik pada suatu bidang dengan menggunakan sifat bayangan cermin dari titik-titik yang dipindahkan. Perhatikan gambar di bawah.

Gambar di samping menunjukkan contoh refleksi (pencerminan) bangun datar $ABCDE$ pada garis m . Perhatikan bahwa ruas garis yang menghubungkan titik dan bayangannya tegak lurus terhadap garis m . Garis m disebut **garis refleksi** untuk $ABCDE$ dan bayangannya $A'B'C'D'E'$.



Karena E terletak pada garis refleksi, titik awal dan bayangannya berada di titik yang sama. Jarak antara A terhadap garis m sama dengan jarak A' terhadap garis m , begitu pula untuk titik sudut yang lainnya dan bayangannya yang memiliki jarak sama terhadap garis refleksi m .

Jika diketahui sebarang titik dengan koordinat (x, y) pada koordinat kartesius, maka koordinat bayangan hasil pencerminannya dapat dilihat pada Tabel 3.4 berikut ini.

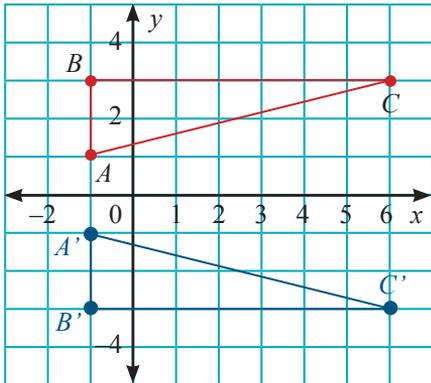
Tabel 3.4 Koordinat Bayangan Hasil Pencerminan dari (x, y)

No.	Pencerminan Terhadap	Titik Koordinat Bayangan
1.	Sumbu- x	$(x, -y)$
2.	Sumbu- y	$(-x, y)$
3.	Titik Asal $O(0, 0)$	$(-x, -y)$
4.	Garis $y = x$	(y, x)
5.	Garis $y = -x$	$(-y, -x)$
6.	Garis $y = h$	$(x, 2h - y)$
7.	Garis $x = h$	$(2h - x, y)$

Contoh 1**Pencerminan Terhadap Sumbu- x**

Segitiga ABC berkoordinat di $A(-1, 1)$, $B(-1, 3)$, dan $C(6, 3)$. Gambar segitiga ABC dan bayangannya yang direfleksikan terhadap sumbu- x . Bandingkan koordinat titik-titik ABC dengan koordinat bayangannya.

Penyelesaian:



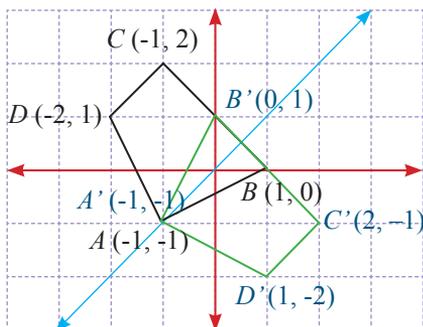
Perhatikan bahwa titik A berada 1 satuan di atas sumbu- x , maka bayangannya adalah A' yang terletak 1 satuan di bawah sumbu- x . Sedangkan titik B dan C berada pada 3 satuan di atas sumbu- x , maka bayangannya adalah B' dan C' yang terletak 3 satuan di bawah sumbu- x . Dengan demikian diperoleh koordinat masing-masing titik dan bayangannya adalah sebagai berikut:

$$A(-1, 1) \rightarrow A'(-1, -1)$$

$$B(-1, 3) \rightarrow B'(-1, -3)$$

$$C(6, 3) \rightarrow C'(6, -3)$$

Hubungkan ketiga titik sehingga membentuk segitiga $A'B'C'$.

Contoh 2**Pencerminan Terhadap Garis $y = x$** 

Diketahui segi empat $ABCD$ yang memiliki koordinat di $A(-1, -1)$, $B(1, 0)$, $C(-1, 2)$ dan $D(-2, 1)$ direfleksikan terhadap garis $y = x$. Gambar $ABCD$ dan bayangannya yang direfleksikan terhadap garis $y = x$. Bandingkan koordinat titik-titik $ABCD$ dengan koordinat bayangannya.

Penyelesaian:

Untuk menentukan bayangan titik-titik segi empat $ABCD$, perhatikan jarak titik B ke garis

$y = x$. Dari titik B buat garis yang tegak lurus ke garis $y = x$ (disebut garis BB') kemudian dapatkan titik B' yang memiliki jarak yang sama besar dengan jarak titik B ke garis $y = x$. Titik B' merupakan bayangan titik B hasil refleksi terhadap garis $y = x$. Dengan demikian diperoleh koordinat B' (0, 1). Gunakan cara yang sama, sehingga diperoleh koordinat bayangan untuk titik-titik yang lainnya sebagai berikut:

$$A(-1, -1) \rightarrow A'(-1, -1)$$

$$B(1, 0) \rightarrow B'(0, 1)$$

$$C(-1, 2) \rightarrow C'(2, -1)$$

$$D(-2, 1) \rightarrow D'(1, -2)$$

Hubungkan keempat titik sehingga membentuk segi empat $A'B'C'D'$.



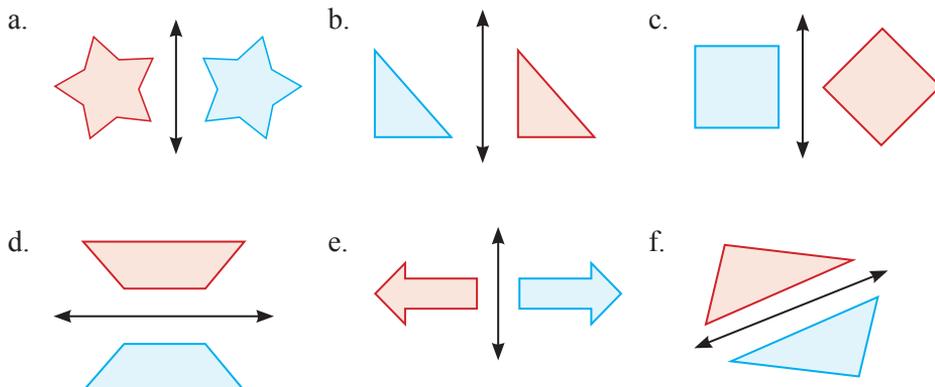
**Ayo Kita
Tinjau Ulang**

1. Setelah dicerminkan terhadap titik asal, ΔXYZ memiliki bayangan di $X'(1, 4)$, $Y'(2, 2)$, dan $Z'(-2, -3)$. Tentukan bayangan ΔXYZ jika direfleksikan terhadap garis $x = -1$.
2. Setelah direfleksikan terhadap sumbu- x , ΔFGH memiliki bayangan di $F'(1, 4)$, $G'(4, 2)$, dan $H'(3, -2)$. Tentukan bayangan ΔFGH setelah direfleksikan terhadap sumbu- y .

Latihan 3.1

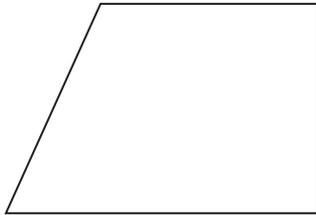
Pencerminan (Refleksi)

1. Tunjukkan apakah gambar yang berwarna biru merupakan hasil pencerminan dari gambar yang berwarna merah. Berikan penjelasanmu.

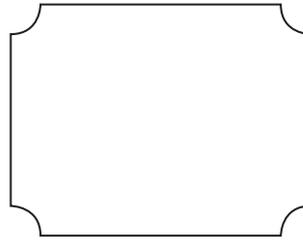


2. Tentukan berapa banyak simetri lipat yang dimiliki gambar berikut.

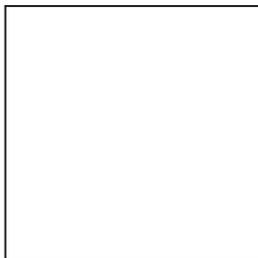
a.



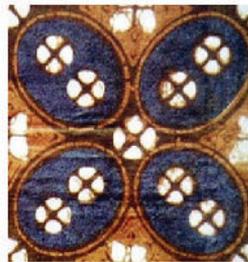
d.



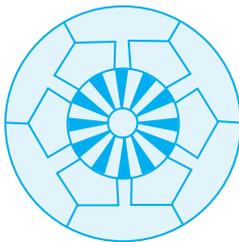
b.



e.



c.



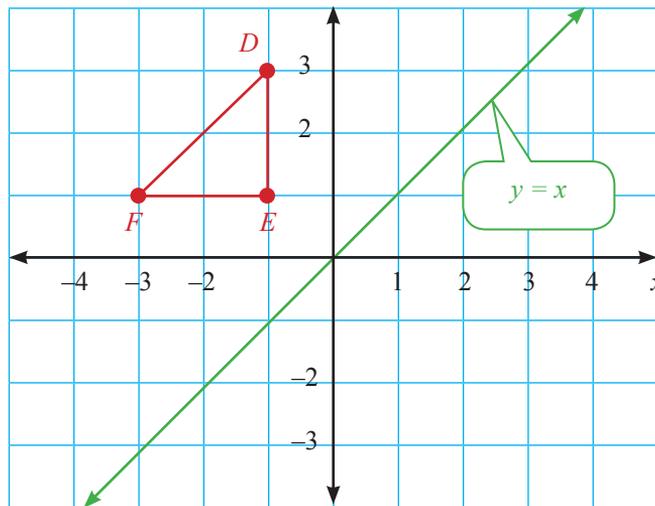
f.



3. Gambar masing-masing bangun berikut dan bayangannya terhadap refleksi yang diberikan.

- Segi empat $JKLM$ dengan titik sudutnya di $J(2, 2)$, $K(7, 4)$, $L(9, -2)$, dan $M(3, -1)$ terhadap sumbu- y .
- Trapesium dengan titik sudutnya di $D(4, 0)$, $E(-2, 4)$, $F(-2, -1)$, dan $G(4, -3)$ terhadap titik asal.
- $\triangle ABC$ dengan titik sudutnya di $A(4, -2)$, $B(4, 2)$, dan $C(6, -2)$ terhadap garis $y = x$.
- $\triangle OPQ$ dengan titik sudutnya di $O(-2, 1)$, $P(0, 3)$, dan $Q(2, 2)$ terhadap garis $y = -x$.

- e. Segi empat $WXYZ$ dengan titik sudutnya di $W(2, -1)$, $X(5, -2)$, $Y(5, -5)$, dan $Z(2, -4)$ terhadap garis $y = 2$.
4. Cerminkan segitiga DEF terhadap garis $y = x$. Gambar segitiga $D'E'F'$ dan tuliskan koordinatnya yang merupakan hasil pencerminan DEF terhadap garis $y = x$.



5. Huruf mana yang akan tetap sama jika dicerminkan terhadap suatu garis?

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

6. Segi empat $KLMN$ dengan titik sudut di $K(-2, 4)$, $L(3, 7)$, $M(4, -8)$, dan $N(-3, -5)$ direfleksikan terhadap sumbu- x kemudian direfleksikan terhadap garis $y = x$. Tentukan koordinat $K''L''M''N''$.
7. Segitiga HIJ direfleksikan terhadap sumbu- x , kemudian sumbu- y , kemudian titik asal. Hasilnya refleksinya berkoordinat di $H'''(2, 3)$, $I'''(8, -4)$, dan $J'''(-6, -7)$. Tentukan koordinat H , I , dan J .



Pertanyaan Penting

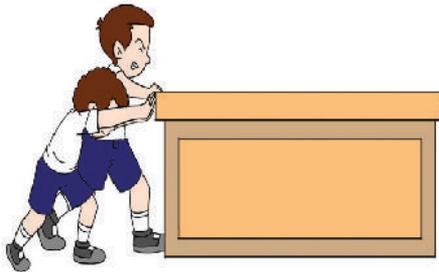
Apa yang dimaksud dengan translasi pada suatu benda? Bagaimana caramu menentukan koordinat bayangan hasil translasi pada koordinat kartesius? Supaya kamu mengetahui dan memahami jawaban dari pertanyaan di atas lakukan kegiatan-kegiatan di bawah ini.

Kegiatan 1

Translasi Pada Suatu Benda



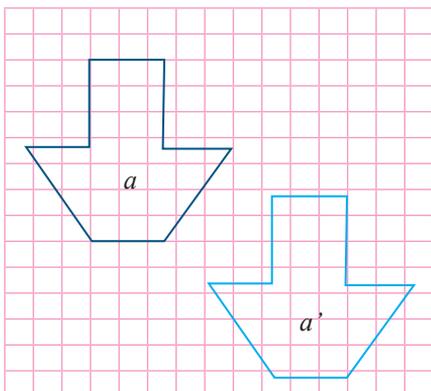
Ayo Kita Amati



Pernahkah kamu menggeser meja dari satu tempat ke tempat lainnya? Ketika kamu berhasil memindahkan meja tersebut maka posisi meja akan berubah dari posisi awal menuju posisi akhir. Gerakan memindahkan meja tersebut merupakan salah satu contoh dari translasi.

Sumber: Dokumen Kemdikbud

Gambar 3.2 Mendorong meja



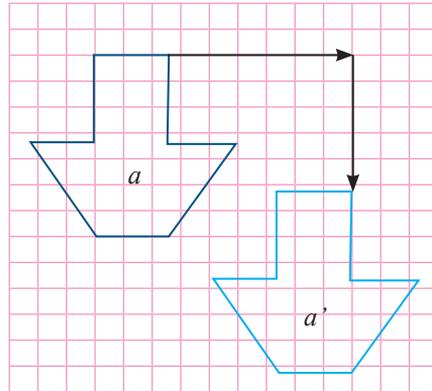
Perhatikan bangun datar a pada gambar di samping. Kemudian perhatikan bangun a' yang merupakan bayangan dari a . Kamu dapat memperoleh bangun datar a' dengan cara menggeser (mentranslasikan) bangun a .



Ayo Kita Mencoba

Untuk mengetahui jenis translasi yang menggerakkan bangun a sehingga menjadi bangun a' , ikuti langkah-langkah berikut ini.

1. Pilih sebarang titik sudut pada bangun awal a (kamu dapat memilih sebarang titik sudut dari bangun), kemudian beri nama titik sudut tersebut A . Pada titik sudut bayangan yang bersesuaian dengan titik A berikan nama A' .
2. Dari titik A gambarlah garis horizontal sampai tepat berada pada bagian atas titik A' . Selanjutnya gambarlah garis vertikal dari titik tersebut sehingga garis tersebut bertemu dengan titik A' .
3. Hitung berapa satuan panjang garis horizontal yang menunjukkan seberapa jauh bangun datar a bergeser (bertranslasi) secara horizontal (ke kanan).
4. Hitung berapa satuan panjang garis vertikal yang menunjukkan seberapa jauh bangun datar a bergeser (bertranslasi) secara vertikal (ke bawah).



Ayo Kita Menanya

Setelah kamu memahami Kegiatan 1 di atas, sekarang buatlah pertanyaan dengan menggunakan beberapa kata berikut: translasi, sumbu horizontal, sumbu vertikal. Tuliskan pertanyaanmu tersebut dengan rapi pada buku tulismu.

Sedikit Informasi

Jika suatu translasi (pergeseran) pada suatu benda dilakukan sepanjang garis horizontal, maka translasi tersebut akan bernilai positif jika benda ditranslasikan ke arah kanan, dan bernilai negatif jika benda ditranslasikan ke arah kiri.



Jika suatu translasi (pergeseran) pada suatu benda dilakukan sepanjang garis vertikal, maka translasi tersebut akan bernilai positif jika benda ditranslasikan ke arah atas, dan bernilai negatif jika benda ditranslasikan ke arah bawah.



Ayo Kita Gali Informasi

Berdasarkan informasi yang telah kamu dapatkan sebelumnya serta Kegiatan 1, jawablah pertanyaan berikut.

1. Apakah translasi pada bagian horizontal yang menggerakkan bangun datar a sehingga menjadi a' bernilai positif atau negatif?
2. Apakah translasi pada bagian vertikal yang menggerakkan bangun datar a sehingga menjadi a' bernilai positif atau negatif?
3. Jika $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ menunjukkan translasi yang menggerakkan suatu bangun datar dengan x menunjukkan translasi pada garis horizontal dan y menunjukkan translasi pada garis vertikal, coba kamu tuliskan pasangan bilangan translasi yang menggerakkan bangun datar a sehingga menjadi a' .

Kegiatan 2

Translasi Pada Koordinat Kartesius



Ayo Kita Mencoba

Diketahui segi empat $ABCD$ memiliki titik sudut di $A(1, 2)$, $B(3, 1)$, $C(4, -1)$ dan $D(2, 0)$. Gambarlah segi empat tersebut kemudian gambar hasil bayangannya jika ditranslasikan sejauh 4 satuan ke kiri dan 2 satuan ke bawah. Tuliskan koordinat bayangan hasil translasi segi empat $ABCD$ (Bayangan $ABCD$ selanjutnya disebut dengan $A'B'C'D'$).



Ayo Kita Gali Informasi

Setelah kamu melakukan aktivitas Kegiatan 2, coba kamu lengkapi Tabel 3.5 berikut ini.

Tabel 3.5 Koordinat Bayangan Hasil Translasi Segi empat $ABCD$

Titik Sudut $ABCD$	$(x - 4, y - 2)$	Titik Sudut $A'B'C'D'$
$A(1, 2)$	$(1 - 4, 2 - 2)$	$(-3, 0)$
...	Titik Asal $O(0, 0)$	$(-x, -y)$
$B(3, 1)$
$C(4, -1)$
$D(2, 0)$

Coba kamu perhatikan Tabel 3.5 di atas. Apakah kolom kedua dan kolom ketiga dari tabel di atas memiliki nilai yang sama? Salah satu cara untuk mendapatkan koordinat bayangan hasil translasi adalah dengan menambahkan secara langsung bilangan yang menunjukkan translasi dengan koordinat awal bangun.

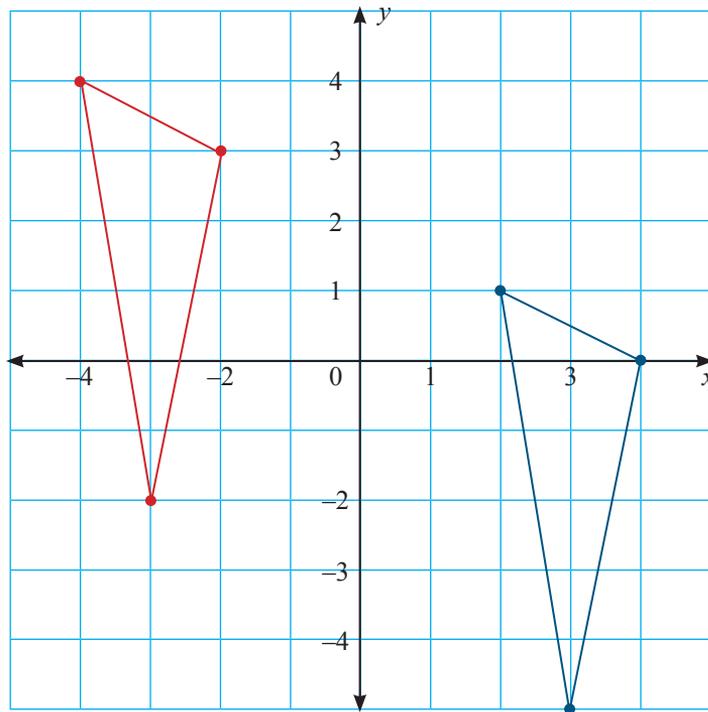
Jika suatu translasi pada suatu titik dilakukan sepanjang garis horizontal, maka bilangan translasi tersebut akan bernilai positif jika titik tersebut ditranslasikan ke arah kanan, dan bernilai negatif jika titik ditranslasikan ke arah kiri. Jika translasi pada suatu titik dilakukan sepanjang garis vertikal, maka bilangan translasi tersebut akan bernilai positif jika titik ditranslasikan ke arah atas, dan bernilai negatif jika titik ditranslasikan ke arah bawah.



Ayo Kita Menalar

Setelah kamu melakukan Kegiatan 1 dan 2, maka kamu telah mengetahui cara mendapatkan koordinat bayangan hasil translasi dari suatu titik maupun bangun datar. Sekarang jawablah pertanyaan di bawah ini agar kamu mengetahui jenis translasi yang menggerakkan koordinat suatu bangun.

Tentukan translasi (pasangan bilangan translasi) yang menggerakkan segitiga merah menjadi segitiga biru.



Dikusi dan Berbagi

Setelah kamu menjawab pertanyaan pada bagian Ayo Kita Menalar, tuliskan jawabanmu di buku tulis. Diskusikan jawabanmu dengan teman sebangkumu. Periksalah apakah kalian memiliki jawaban yang sama. Majulah ke depan kelas, bagikan hasil diskusimu kepada teman sekelasmu.



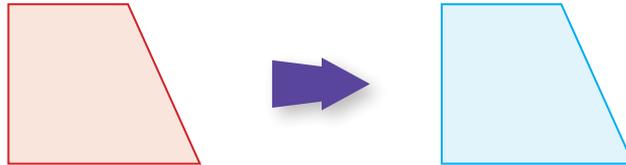
Ayo Kita Simpulkan

Setelah kamu melakukan beberapa kegiatan di atas, coba kamu simpulkan bagaimana cara mendapatkan koordinat hasil translasi dari suatu benda pada koordinat kartesius?

Materi Esensi 3.2

Pergeseran (Translasi)

Translasi merupakan salah satu jenis transformasi yang bertujuan untuk memindahkan semua titik suatu bangun dengan jarak dan arah yang sama.



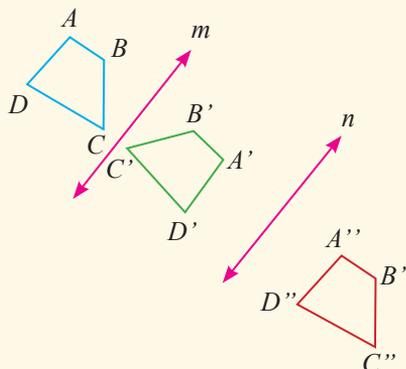
Translasi pada bidang Kartesius dapat dilukis jika kamu mengetahui arah dan seberapa jauh gambar bergerak secara mendatar dan atau vertikal. Untuk nilai yang sudah ditentukan a dan b yakni translasi $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ memindah setiap titik $P(x, y)$ dari sebuah bangun pada bidang datar ke $P'(x + a, y + b)$. Translasi dapat disimbolkan dengan $(x, y) \rightarrow (x + a, y + b)$.

Sedikit Informasi

Menentukan Translasi Dengan Menggunakan Pencerminan Berulang

Cara lain untuk menentukan translasi adalah dengan menunjukkan pencerminan terhadap dua garis sejajar, kemudian mencerminkan gambar/bangun terhadap garis lain yang sejajar. Perhatikan contoh berikut ini.

Perhatikan gambar di bawah. Garis m dan n sejajar. Tentukan apakah bangun berwarna merah merupakan translasi bangun yang berwarna biru, segi empat $ABCD$.



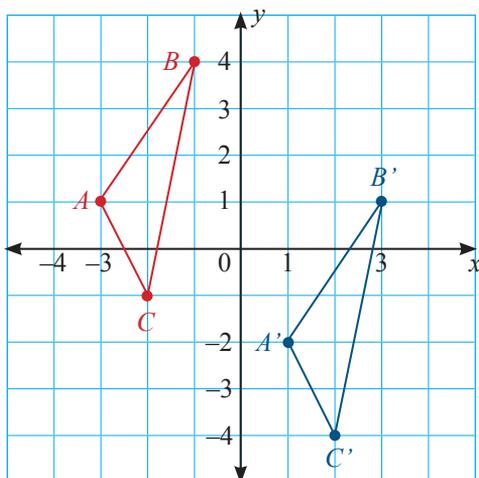
Penyelesaian

Cerminkan segi empat $ABCD$ di garis m . Hasilnya yaitu bangun berwarna hijau, segi empat $A'B'C'D'$. Kemudian cerminkan bangun berwarna hijau, segi empat $A'B'C'D'$ di garis n menghasilkan segi empat berwarna merah. Segiempat berwarna merah, $A''B''C''D''$ memiliki bentuk dan arah yang sama dengan segi empat $ABCD$.

Jadi, segi empat $A''B''C''D''$ merupakan bayangan hasil translasi segi empat $ABCD$.

Contoh 1

Koordinat Bayangan Hasil Translasi



Gambar di samping menunjukkan segitiga ABC yang ditranslasikan 4 satuan ke kanan dan 3 satuan ke bawah. Hal ini dapat dinyatakan sebagai $(x, y) \rightarrow (x + 4, y - 3)$.

Koordinat bayangan hasil translasinya sebagai berikut

$$A(-3, 1) \rightarrow A'(-3 + 4, 1 - 3) \text{ atau } A'(1, -2)$$

$$B(-1, 4) \rightarrow B'(-1 + 4, 4 - 3) \text{ atau } B'(3, 1)$$

$$C(-2, -1) \rightarrow C'(-2 + 4, -1 - 3) \text{ atau } C'(2, -4)$$



Ayo Kita Tinjau Ulang

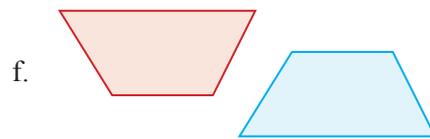
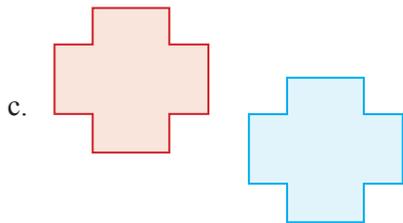
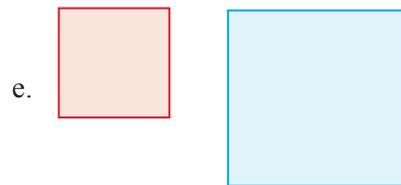
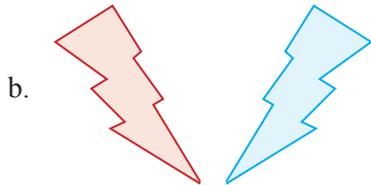
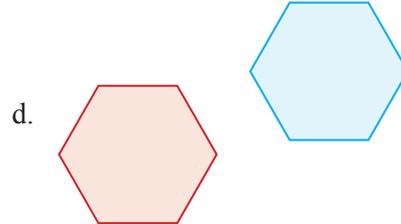
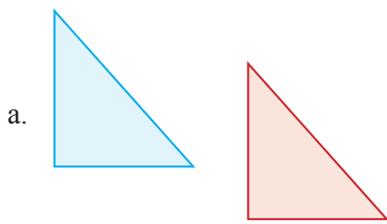
Setelah ditranslasikan oleh $(x, y) \rightarrow (x - 4, y + 5)$, ΔXYZ memiliki bayangan $X'(-8, 5)$, $Y'(2, 7)$, dan $Z'(3, 1)$. Tentukan koordinat X , Y , dan Z .

Latihan 3.2

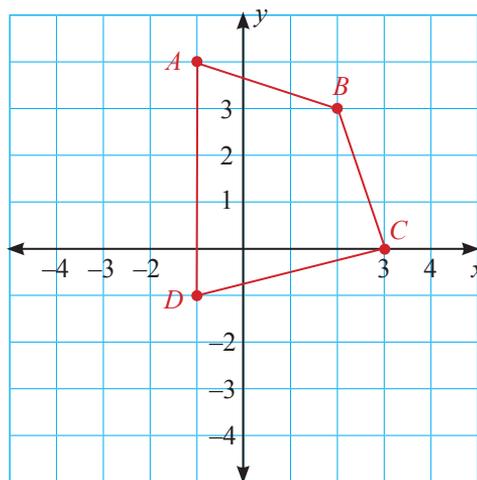
Pergeseran (Translasi)

1. Tentukan apakah gambar yang berwarna biru merupakan hasil pencerminan dari gambar yang berwarna merah. Berikan penjelasanmu.

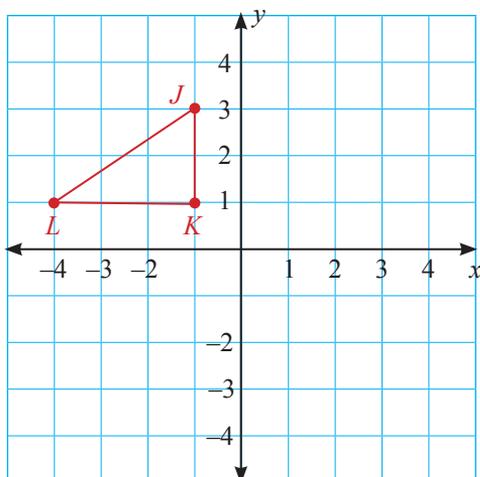




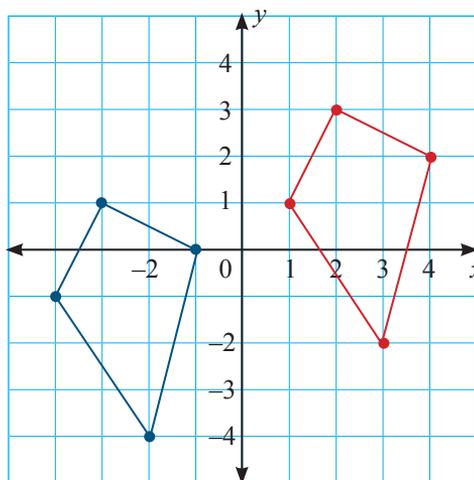
2. Gambar dan tentukan koordinat hasil translasi dari bangun datar di bawah ini.
- a. Translasikan segi empat merah sejauh 2 satuan ke kiri dan 5 satuan ke bawah



- b. Translasikan segitiga merah sejauh 3 satuan ke kanan dan 4 satuan ke bawah.

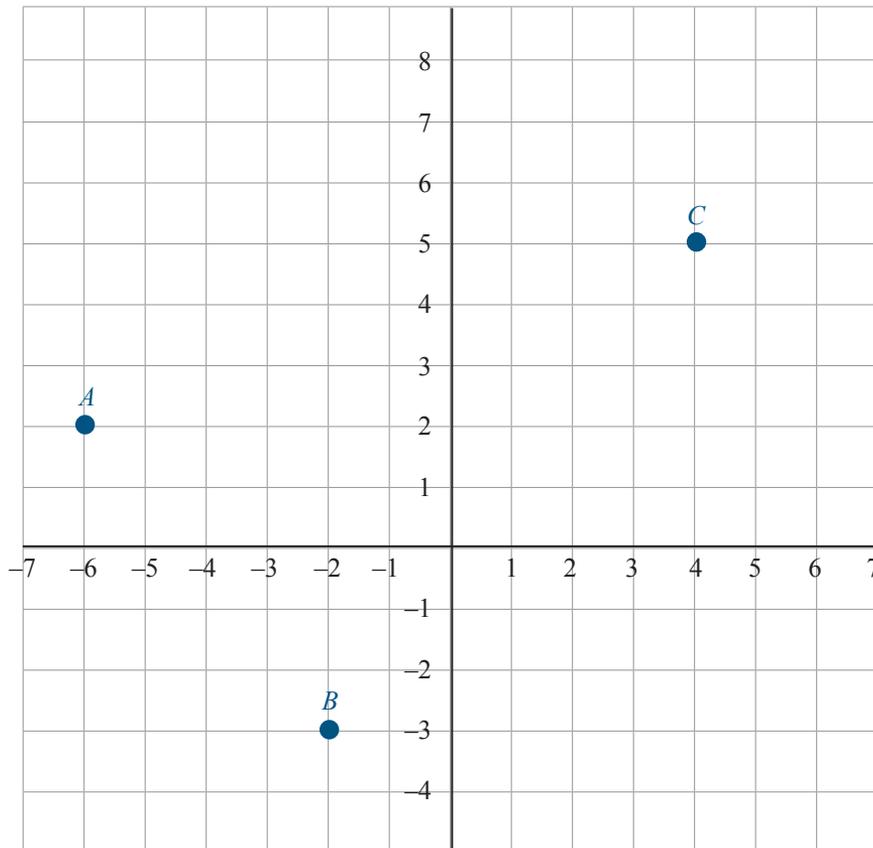


3. Segitiga FGH ditranslasi sehingga menghasilkan bayangan ΔPQR . Diketahui koordinat $F(3, 9)$, $G(-1, 4)$, $P(4, 2)$, dan $R(6, -3)$, tentukan koordinat H dan Q . Tentukan pula translasinya.
4. Segitiga WAN berkoordinat di $W(0, 1)$, $A(1, -2)$ dan $N(-2, 1)$. Gambarlah segitiga tersebut beserta bayangannya setelah translasi:
- 1 satuan ke kiri dan 5 satuan ke atas
 - $(x + 2, y + 4)$
 - 3 satuan ke kanan dan 3 satuan ke bawah
 - $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ kemudian dicerminkan terhadap sumbu- y .



5. Jelaskan translasi yang menggerakkan bangun datar yang berwarna biru menjadi bangun datar yang berwarna merah.
6. Diketahui Segitiga OPQ berkoordinat di $O(2, 5)$, $P(-3, 4)$, dan $Q(4, -2)$ ditranslasikan sehingga didapatkan koordinat bayangannya adalah O' di $(3, 1)$. Tentukan pasangan bilangan translasinya dan koordinat titik P' dan Q' .

7. Seekor harimau sedang berburu rusa di dalam hutan. Berdasarkan hasil pemantauan diketahui bahwa koordinat rusa berada di titik A dan koordinat harimau berada pada titik B . Rusa tersebut kemudian bergerak menuju titik C .



- Tentukan pasangan bilangan translasi yang menggerakkan rusa dari titik A menuju titik C .
- Jika harimau menggunakan translasi yang sama dengan yang dilakukan oleh rusa, apakah harimau dapat menangkap rusa tersebut?
- Tentukan pasangan bilangan translasi yang harus dilakukan oleh harimau agar ia mendapatkan rusa.



Pertanyaan Penting

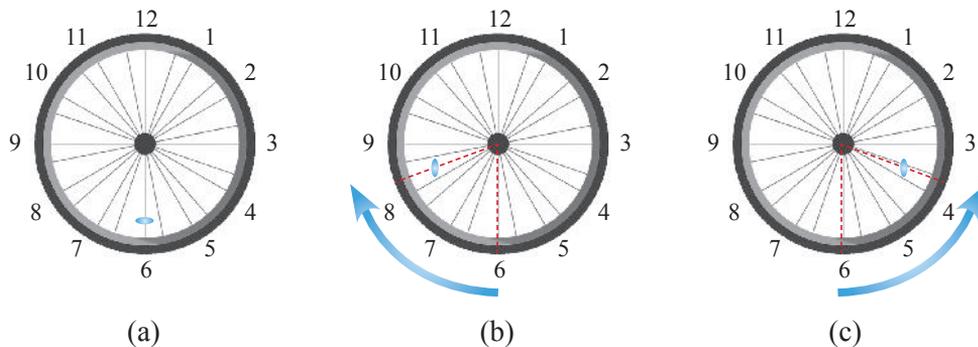
Apakah kamu pernah melihat suatu benda berputar? Apa yang dimaksud dengan rotasi pada suatu benda? Bagaimana caramu menentukan koordinat bayangan hasil rotasi pada koordinat kartesius? Supaya kamu dapat mengetahui dan memahami jawaban pertanyaan di atas lakukanlah kegiatan-kegiatan di bawah ini.

Kegiatan 1

Rotasi Benda



Ayo Kita Amati

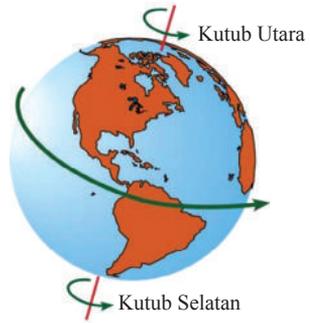


Sumber: Dokumen Kemdikbud

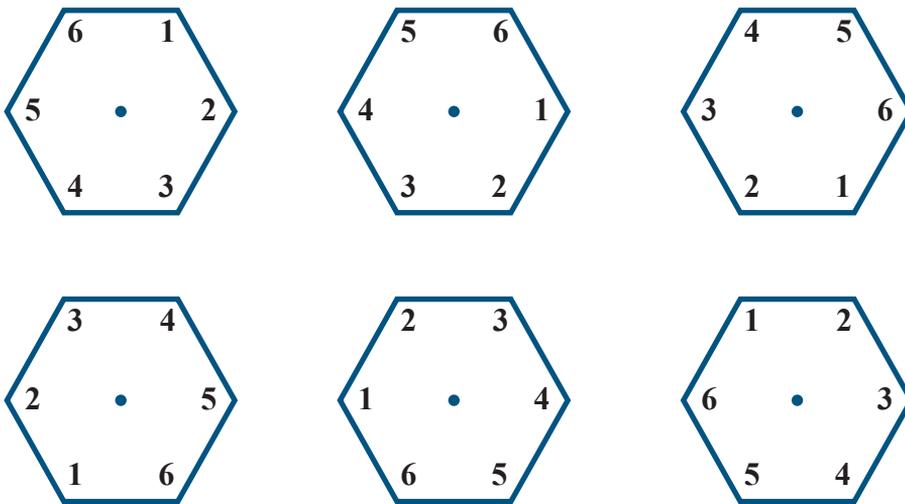
Gambar 3.3 Perputaran roda

Coba perhatikan roda yang berputar pada Gambar 3.3 di atas. Roda tersebut dapat diputar searah jarum jam seperti yang terlihat pada Gambar 3.3 (b) atau dapat diputar berlawanan arah jarum jam seperti yang terlihat pada Gambar 3.3 (c). Gerakan putaran roda merupakan salah satu contoh dari rotasi. Rotasi merupakan salah satu bentuk transformasi yang memutar setiap titik pada gambar sampai sudut dan arah tertentu terhadap titik yang tetap. Titik tetap ini disebut *pusat rotasi*. Besarnya sudut dari bayangan benda terhadap posisi awal disebut dengan *sudut rotasi*.

Beberapa benda dapat berotasi dengan pusat rotasi berada di dalam benda itu sendiri. Salah satu contohnya adalah Planet Bumi berputar atau berotasi pada porosnya. Pada pembelajaran terdahulu, kamu juga telah mempelajari bahwa beberapa benda memiliki simetri putar. Jika suatu bangun/gambar dapat dirotasikan kurang dari 360° terhadap titik pusat rotasi sedemikian sehingga bayangan dan gambar awalnya sama, maka bangun/gambar tersebut memiliki **simetri putar**.



Sumber: <http://www.fisikanet.lipi.go.id>



Gambar di atas menunjukkan segi enam beraturan yang memiliki 6 bentuk yang sama jika diputar/dirotasikan. Karena segi enam setelah diputar kurang dari 360° (termasuk 0°) bentuknya sama seperti semula, maka segi enam memiliki **simetri putar tingkat enam**.

Jika suatu bangun setelah diputar satu putaran pada pusatnya dan bentuknya sama seperti gambar awal setelah n putaran, maka bangun tersebut memiliki simetri putar tingkat n , untuk $n > 1$.



Ayo Kita Gali Informasi

Sekarang coba kamu sebutkan sedikitnya 5 bangun yang memiliki simetri putar dan sebutkan bangun tersebut memiliki simetri putar tingkat berapa.

Kegiatan 2

Merotasi Puzzle



Ayo Kita Amati

Coba kamu amati *puzzle* di samping ini. Tariklah garis lurus dari titik P ke arah pusat *puzzle* tersebut. Rotasikan *puzzle* tersebut 270° searah jarum jam dengan pusat rotasi di titik P .



Puzzle mana yang menjadi hasil rotasinya?

P

A



B



C



D



Ayo Kita Gali Informasi

1. Jika *puzzle* tersebut dirotasikan 90° berlawanan arah jarum jam dengan pusat rotasi titik P , *puzzle* mana yang menjadi bayangan hasil rotasinya?
2. Jika *puzzle* tersebut dirotasikan 180° berlawanan arah jarum jam dengan pusat rotasi titik P , *puzzle* mana yang menjadi bayangan hasil rotasinya? Bagaimana jika *puzzle* tersebut dirotasikan 180° berlawanan arah jarum jam dengan pusat rotasi titik P , *puzzle* mana yang menjadi bayangan hasil rotasinya? Apakah hasilnya sama?
3. Apakah pilihan D merupakan hasil rotasi dari *puzzle* awal? Jika tidak, jenis transformasi apakah yang ditunjukkan oleh pilihan D terhadap *puzzle* awal?



Ayo Kita Menanya

Setelah kamu melakukan Kegiatan 2, buatlah pertanyaan dengan menggunakan beberapa kata berikut: rotasi, searah jarum jam, berlawanan jarum jam, sudut rotasi, dan pusat rotasi. Tuliskan pertanyaanmu tersebut dengan rapi pada buku tulismu.



Kegiatan 3**Rotasi Titik pada Bidang Koordinat**

*Ayo Kita
Mencoba*

Sediakan kertas milimeter (kertas berpetak). Kemudian buatlah koordinat kartesius pada kertas tersebut. Lakukanlah kegiatan di bawah ini.

1. Buatlah titik W (7, 7) dan titik A (5, 4). Gambar dan tentukan bayangan titik W dan A pada rotasi 90° dengan pusat rotasi titik asal O (0, 0) searah jarum jam.
2. Gambar dan tentukan bayangan titik W dan A pada rotasi 90° dengan pusat rotasi titik asal O (0, 0) berlawanan arah jarum jam.
3. Jika titik W dan A dirotasikan sejauh 180° dengan pusat rotasi titik asal O (0, 0) searah jarum jam, berapakah koordinat bayangannya?
4. Apakah hasilnya sama jika kamu merotasikan titik tersebut sejauh 180° dengan pusat rotasi titik asal O (0, 0) berlawanan arah jarum jam?

Kegiatan 4**Menggambar Rotasi Segitiga Pada Bidang Koordinat**

*Ayo Kita
Mencoba*

Sediakan kertas milimeter (kertas berpetak). Kemudian buatlah koordinat kartesius pada kertas tersebut. Lakukanlah kegiatan di bawah ini.

Diketahui segitiga PQR memiliki koordinat di P (2, 3), Q (6, 3), dan R (5, 5). Gambarlah $\triangle PQR$ dan bayangannya yaitu $\triangle P'Q'R'$ pada rotasi 60° berlawanan dengan arah berlawanan perputaran jarum jam terhadap titik asal O (0, 0). Ikuti langkah-langkah di bawah ini.

1. Pertama, gambar $\triangle PQR$.
2. Gambar ruas garis dari titik asal ke titik P . Tariklah garis OP dengan O menunjukkan titik asal.



3. Gunakan busur untuk mengukur sudut 60° berlawanan arah jarum jam dengan OP sebagai salah satu sisinya.
4. Gambar garis OT sehingga POT membentuk sudut 60° .
5. Gunakan jangka untuk menyalin OP di OT . Beri nama garis OP' .
6. Ulangi langkah di atas untuk titik Q dan R sehingga didapatkan titik Q' dan R' . Hubungkan titik P' , Q' dan R' sehingga terbentuk segitiga $P'Q'R'$.
7. $\Delta P'Q'R'$ merupakan bayangan hasil rotasi 60° dari ΔPQR berlawanan arah jarum jam dengan pusat rotasi di titik asal $O(0, 0)$.



**Ayo Kita
Menalar**

Bagaimana hasil bayangan dari ΔPQR jika dirotasikan 90° dan 180° searah jarum jam? Berapakah koordinat titik P' , Q' dan R' yang merupakan bayangan dari titik P , Q , dan R ? Lakukan langkah-langkah yang sama seperti pada bagian Ayo Kita Mencoba.



**Dikusi dan
Berbagi**

Setelah kamu menjawab pertanyaan pada bagian Ayo Kita Menalar, tuliskan jawabanmu di buku tulismu. Diskusikan jawabanmu dengan teman sebangkumu. Periksalah apakah kalian memiliki jawaban yang sama. Majulah ke depan kelas, bagikan hasil diskusimu kepada teman sekelasmu.



**Ayo Kita
Simpulkan**

Setelah kamu melakukan Kegiatan 4, apa yang dapat kamu simpulkan?

Jika sembarang titik (x, y) dirotasikan 90° dengan pusat rotasi titik asal $O(0, 0)$ searah jarum jam dan berlawanan arah jarum jam bagaimana koordinat bayangan hasil rotasinya?

Jika sembarang titik (x, y) dirotasikan 180° dengan pusat rotasi titik asal $O(0, 0)$ searah jarum jam dan berlawanan arah jarum jam bagaimana koordinat bayangan hasil rotasinya?

Isilah Tabel 3.6 untuk memudahkanmu menarik kesimpulan

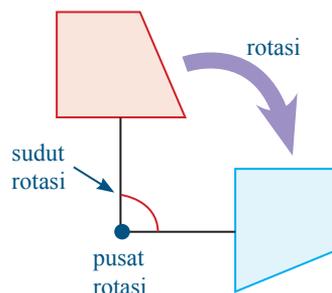
Tabel 3.6 Koordinat Bayangan Hasil Rotasi

Titik koordinat	Pusat Rotasi	Sudut Rotasi	Arah Rotasi	Bayangan Hasil Rotasi
$(2, 4)$	$(0, 0)$	90°	Searah jarum jam	...
(x, y)	$(0, 0)$	90°	Searah jarum jam	...
(x, y)	$(0, 0)$	90°	Berlawanan arah jarum jam	..
$(7, 5)$	$(0, 0)$	180°	Berlawanan arah jarum jam	...
(x, y)	$(0, 0)$	180°	Searah jarum jam	...
(x, y)	$(0, 0)$	180°	Berlawanan arah jarum jam	...

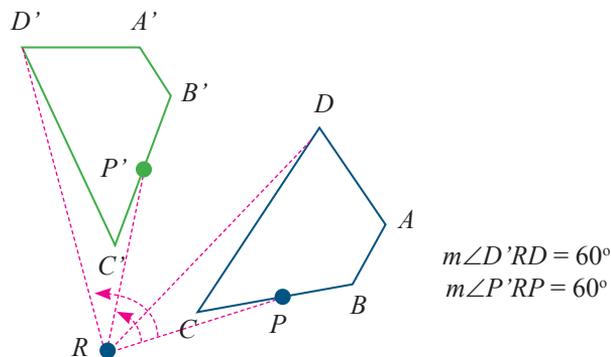
Materi Esensi 3.3

Perputaran (Rotasi)

Rotasi merupakan salah satu bentuk transformasi yang memutar setiap titik pada gambar sampai sudut dan arah tertentu terhadap titik yang tetap. Titik tetap ini disebut pusat rotasi. Besarnya sudut dari bayangan benda terhadap posisi awal disebut dengan sudut rotasi.



Gambar di bawah ini menunjukkan rotasi bangun $ABCD$ terhadap pusat rotasi, R . Besar sudut ARA' , BRB' , CRC' , dan DRD' sama. Sebarang titik P pada bangun $ABCD$ memiliki bayangan P' di $A'B'C'D'$ sedemikian sehingga besar $\angle PRP'$ konstan. Sudut ini disebut sudut rotasi.



Suatu rotasi ditentukan oleh arah rotasi. Jika *berlawanan arah* dengan arah perputaran jarum jam, maka *sudut putarnya positif*. Jika *searah* perputaran jarum jam, maka sudut putarnya *negatif*. Pada rotasi, bangun awal selalu kongruen dengan bayangannya.

Contoh 1

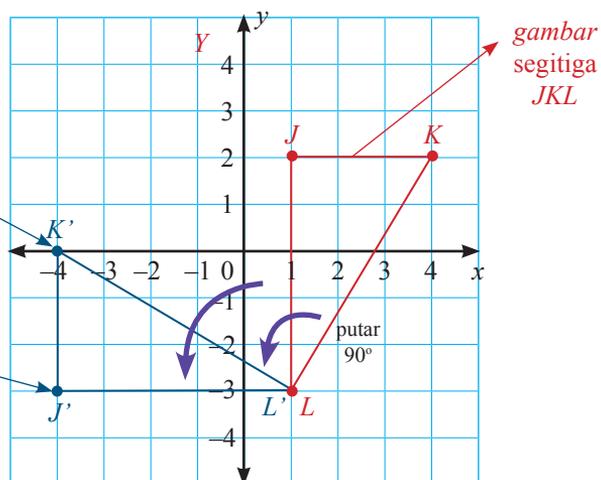
Menggambar Bayangan Segitiga Hasil Rotasi

Tentukan bayangan segitiga JKL dengan koordinat $J(1, 2)$, $K(4, 2)$, dan $L(1, -3)$ pada rotasi 90° berlawanan jarum jam dengan pusat rotasi adalah titik L .

Penyelesaian:

dapatkan titik K' sehingga segmen garis KL memiliki panjang yang sama dengan segmen garis $K'L'$ dan membentuk sudut 90° .

dengan cara yang sama untuk mendapatkan J' . Hubungkan ketiga titik tersebut.

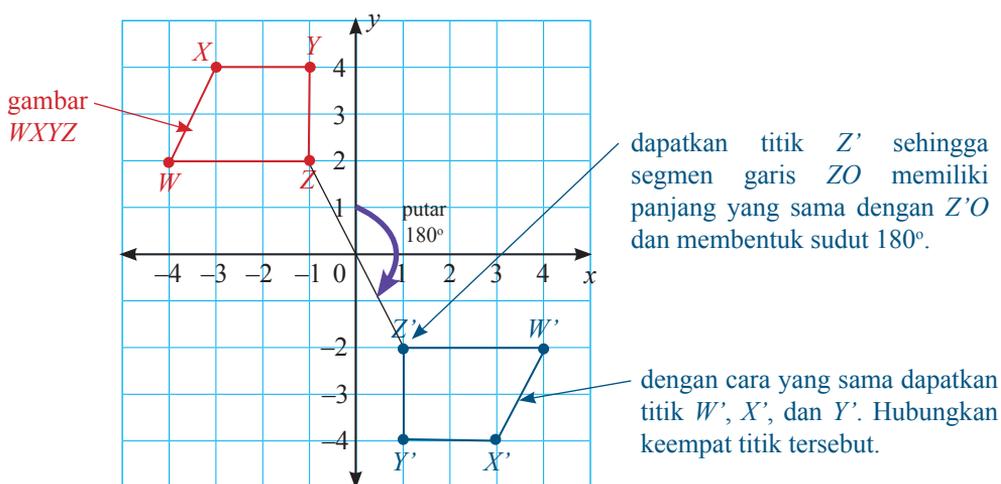


Koordinat bayangannya $J'(-4, -3)$, $K'(-4, 0)$, dan $L'(1, -3)$.

Contoh 2**Menggambar Bayangan Trapezium Hasil Rotasi**

Tentukan bayangan trapezium $WXYZ$ dengan koordinat $W(-4, 2)$, $X(-3, 4)$, $Y(-1, 4)$ dan $Z(-1, 2)$ pada rotasi 180° dengan pusat rotasi $O(0, 0)$.

Penyelesaian:



Koordinat bayangannya $W'(4, -2)$, $X'(3, -4)$, $Y'(1, -4)$ dan $Z'(1, -2)$.



**Ayo Kita
Tinjau Ulang**

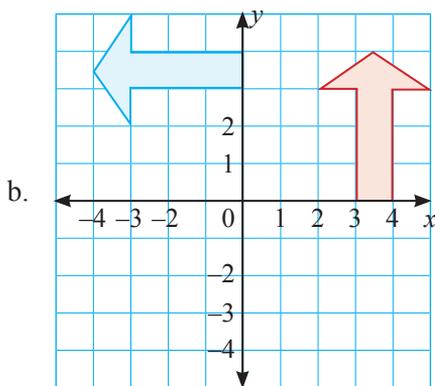
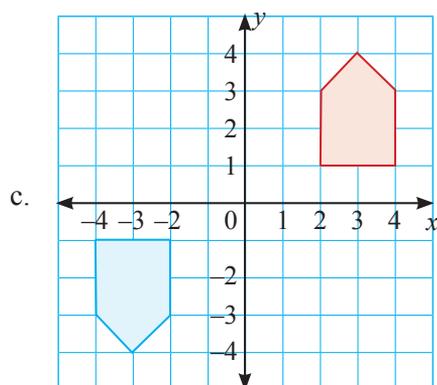
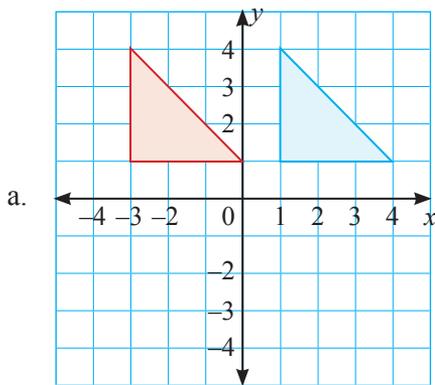
Setelah kamu mengamati, menggali informasi, dan menanya, sekarang selesaikan permasalahan berikut.

Gambar bayangan rotasi dari Segi empat $ABCD$ dengan $A(-5, 4)$, $B(-5, 1)$, $C(-1, 1)$ dan $D(-2, 4)$ berikut dengan sudut 90° jika diketahui arah rotasi berlawanan jarum jam dan pusat rotasi di titik C . Tentukan koordinat titik-titik bayangannya.

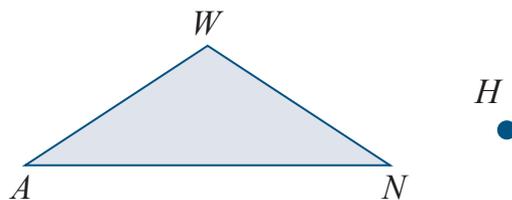
Latihan 3.3**Perputaran (Rotasi)**

1. Jelaskan apakah gambar yang berwarna biru merupakan hasil rotasi dari gambar yang berwarna merah. Jika ya, dapatkan berapa besar sudut rotasi dan bagaimana arah dari rotasi tersebut.



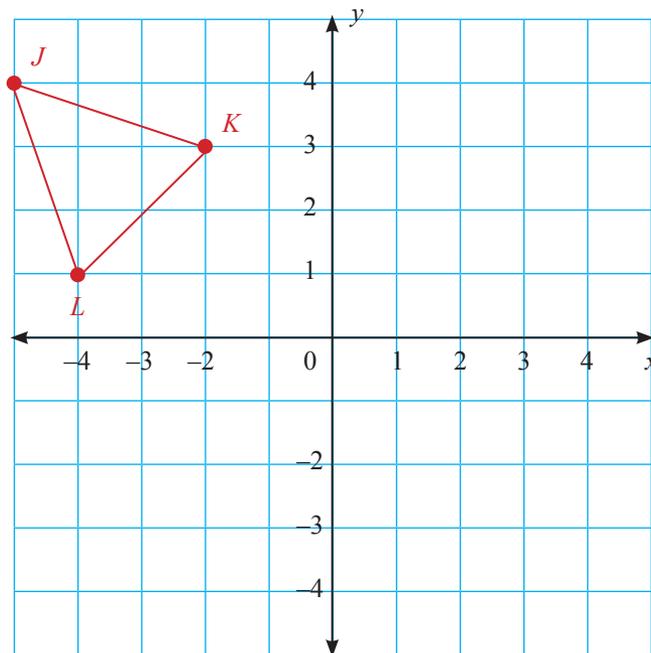


- Segi empat $PQRS$ berkoordinat di $P(2, -2)$, $Q(4, -1)$, $R(4, -3)$ dan $S(2, -4)$. Gambarlah bayangan $PQRS$ pada rotasi 90° berlawanan arah jarum jam yang berpusat di titik asal.
- Salinlah $\triangle WAN$ berikut. Kemudian rotasikan segitiga tersebut sebesar 90° searah jarum jam yang berpusat di titik H .



- Gambar bayangan rotasi setiap bangun berikut dengan sudut 90° jika diketahui arah dan pusat rotasi. Tentukan koordinat titik-titik bayangannya. $\triangle WAN$ dengan $W(-4, 1)$, $A(-2, 1)$, dan $N(-4, -3)$ berlawanan arah jarum jam dengan pusat rotasi di titik N .

5. Gambar bayangan transformasi untuk setiap segitiga berikut dengan mencerminkan segitiga pada garis yang diketahui. Bayangan akhir dari setiap bangun juga merupakan hasil rotasi. Tentukan koordinat bayangan dan sudut rotasi.
- $\triangle TUV$ dengan $T(4, 0)$, $U(2, 3)$, dan $V(1, 2)$ direfleksikan pada sumbu- y dilanjutkan sumbu- x .
 - $\triangle KLM$ dengan $K(5, 0)$, $L(2, 4)$, dan $M(-2, 4)$ direfleksikan pada garis $y = x$ dilanjutkan sumbu- x .
 - $\triangle XYZ$ dengan $X(5, 0)$, $Y(3, 4)$, dan $Z(-3, 4)$ direfleksikan pada garis $y = -x$ dilanjutkan garis $y = x$.
6. Diketahui segitiga JKL seperti pada gambar di bawah ini.



- Rotasikan segitiga JKL dengan sudut rotasi 90° searah jarum jam dengan pusat rotasi titik asal $(0, 0)$. Berapakah koordinat titik sudut dari segitiga $J'K'L'$ yang merupakan bayangan dari segitiga JKL ?
- Rotasikan segitiga JKL dengan sudut rotasi 180° searah jarum jam dengan pusat rotasi titik asal $(0, 0)$. Berapakah koordinat titik sudut dari segitiga $J'K'L'$ yang merupakan bayangan dari segitiga JKL ?

7. Diketahui segitiga RST dengan koordinat titik sudut di $R(3, 6)$, $S(-5, 2)$ dan $T(3, -3)$. Gambar bayangan hasil transformasinya jika diketahui segitiga tersebut:
- Dirotasi 90° searah jarum jam yang berpusat di titik asal kemudian dicerminkan terhadap sumbu- y .
 - Dirotasi 90° berlawanan arah jarum jam yang berpusat di titik asal kemudian dilatasi dengan faktor skala 2 berpusat di titik asal.
 - Dirotasi 180° berlawanan arah jarum jam yang berpusat di titik asal kemudian di translasi $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ setelah itu dicerminkan terhadap sumbu- x .

3.4

Dilatasi



Pertanyaan Penting

Semua transformasi yang telah kamu pelajari dalam bab ini menghasilkan gambar yang sama dengan gambar aslinya. Dilatasi merupakan jenis lain dari transformasi. Namun, bayangan dilatasi mungkin memiliki ukuran yang berbeda dari gambar aslinya. Dilatasi merupakan transformasi yang mengubah ukuran sebuah gambar. Dilatasi membutuhkan titik pusat dan faktor skala. Apa itu titik pusat dilatasi dan faktor skala? Lakukan kegiatan di bawah ini agar kamu dapat menjawab pertanyaan tersebut.

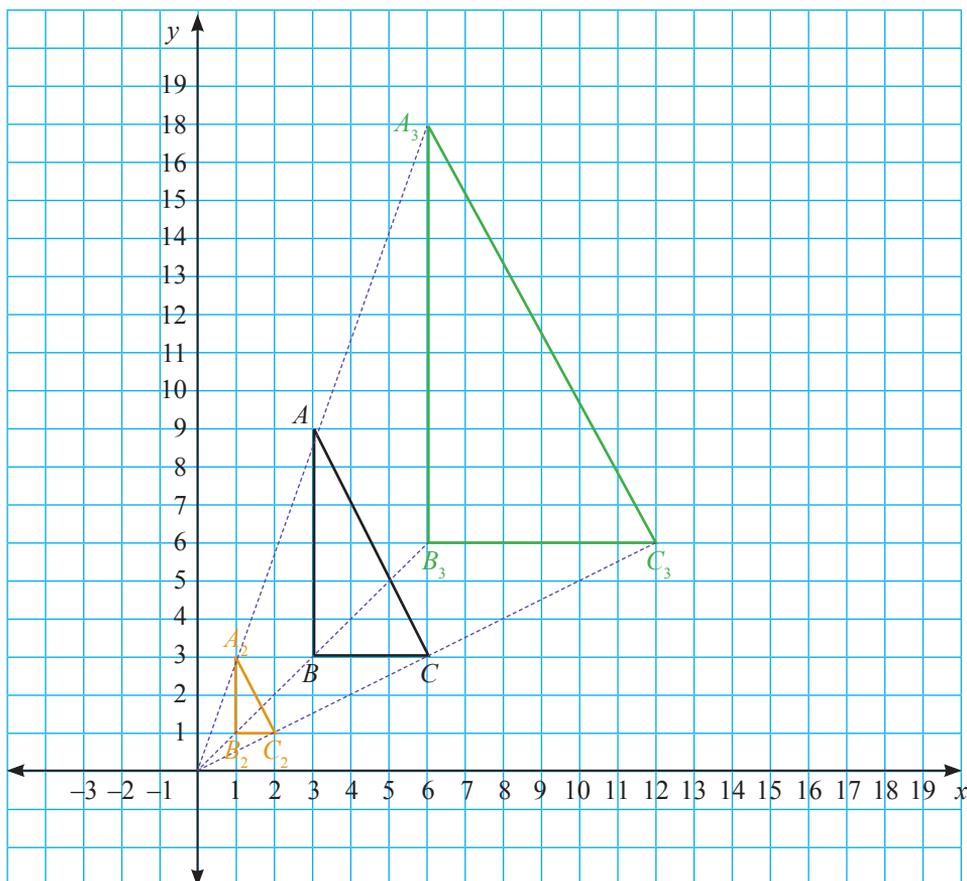
Kegiatan 1

Dilatasi Benda



Ayo Kita Amati

Gambar di bawah ini menunjukkan bagaimana dilatasi dapat menghasilkan bayangan yang lebih besar dan bayangan yang lebih kecil dari aslinya. Segitiga ABC didilatasi dengan pusat dilatasi titik awal $P(0, 0)$ sehingga menghasilkan segitiga $A_2B_2C_2$ dan segitiga $A_3B_3C_3$.



Ayo Kita Gali Informasi

Berapakah koordinat dari titik A , B , dan C ? Berapakah koordinat dari titik A_2 , B_2 , dan C_2 ? Berapakah koordinat dari titik A_3 , B_3 , dan C_3 ?

Perhatikan segitiga $A_2B_2C_2$ dan segitiga ABC . Berapakah panjang PA_2 jikadibandingkan dengan PA ? Bagaimana dengan perbandingan kedua sisi yang lain? Apakah sama? Coba lengkapi bagian kosong di bawah ini untuk memudahkanmu melihat hubungan antara segitiga $A_2B_2C_2$ dan segitiga ABC .

$$PA_2 = \dots \times (PA)$$

$$PB_2 = \dots \times (PB)$$

$$PC_2 = \textcircled{\dots} \times (PC)$$

Nilai ini selanjutnya disebut dengan faktor skala

Berapakah besarnya faktor skala segitiga $A_2B_2C_2$ yang merupakan hasil dilatasi dari segitiga ABC ?

Dengan cara yang sama, berapakah faktor skala Segitiga $A_3B_3C_3$ yang merupakan hasil dilatasi segitiga ABC ?



**Ayo Kita
Mencoba**

Segitiga ABC yang telah kamu amati pada Kegiatan 1, selanjutnya akan didilatasi dengan faktor skala 3. Berapa koordinat bayangan hasil dilatasi?



**Ayo Kita
Menanya**

Setelah kamu melakukan Kegiatan 1, buatlah pertanyaan dengan menggunakan beberapa kata berikut: koordinat bayangan, dilatasi, dan faktor skala. Tuliskan pertanyaanmu tersebut dengan rapi pada buku tulismu.

Kegiatan 2

Menggambar Bayangan Hasil Dilatasi



**Ayo Kita
Mencoba**

Diketahui segitiga ABC berkoordinat di $A(7, 10)$, $B(4, -6)$, dan $C(-2, 3)$. Tentukan bayangan ΔABC setelah didilatasi yang berpusat di titik asal dengan faktor skala 2. Gambar segitiga asal dan bayangannya. Ikuti langkah-langkah berikut ini:

- Langkah 1 Gambar ΔABC sesuai koordinatnya.
- Langkah 2 Tentukan titik A' sehingga $OA' = 2OA$, titik B' sehingga $OB' = 2OB$, dan titik C' sehingga $OC' = 2OC$.
- Langkah 3 Hubungkan titik-titik A' , B' dan C' menjadi $\Delta A'B'C'$.



**Ayo Kita Gali
Informasi**

Berapakah koordinat titik A' , B' dan C' ? Lengkapi bagian kosong di bawah ini untuk mengetahui hubungan antar titik A' dan A , B' dan B , serta titik C' dan C .

$$A' = (\dots, \dots) = (2 \times \dots, 2 \times \dots)$$

$$B' = (\dots, \dots) = (2 \times \dots, 2 \times \dots)$$

$$C' = (\dots, \dots) = (2 \times \dots, 2 \times \dots)$$

Nilai ini menunjukkan faktor skala

Nilai ini menunjukkan koordinat awal ABC



Ayo Kita Menalar

Berdasarkan Kegiatan 2, kamu telah mempelajari cara menentukan dilatasi dengan pusat di titik asal $O(0, 0)$. Kamu dapat dengan mudah menentukan titik-titik koordinat bayangan dengan mengalikan titik koordinat asli dengan faktor skala. Bagaimana jika pusat dilatasi bukan di titik asal $O(0, 0)$? Jelaskan bagaimana caramu menentukan bayangan suatu bangun yang berpusat di suatu titik $P(a, b)$.



Ayo Kita Simpulkan

Berdasarkan Kegiatan 1, kesimpulan apa yang kamu peroleh?

Setelah kamu melakukan beberapa kegiatan di atas, coba kamu buat kesimpulan dengan menjawab beberapa pertanyaan berikut ini.

1. Apa saja faktor yang menentukan dalam proses dilatasi?
2. Jika suatu titik $P(x, y)$ didilatasi dengan pusat $O(0, 0)$ dengan faktor skala k , bagaimana koordinat akhirnya?
3. Apakah pembesaran dan pengecilan suatu bangun termasuk dilatasi? Jika ya, bagaimana cara membedakannya?



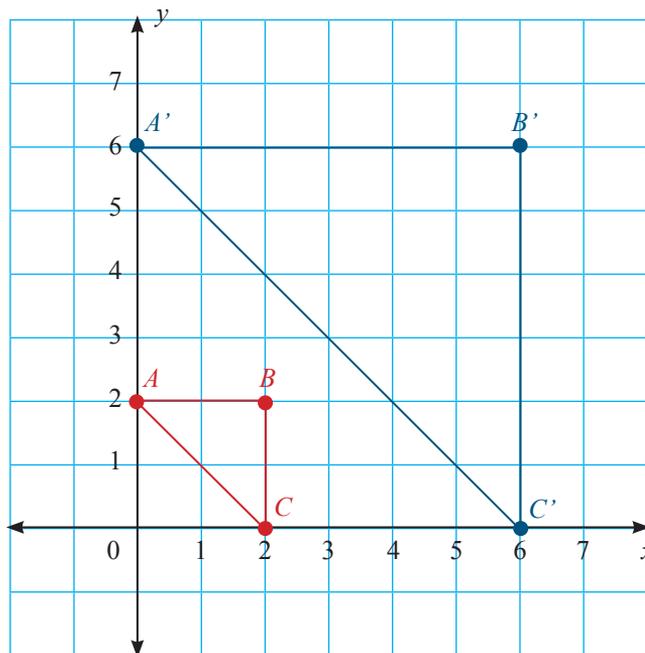
Dikusi dan Berbagi

Setelah kamu menjawab pertanyaan pada bagian Ayo Kita Simpulkan, tuliskan jawabanmu di buku tulismu. Diskusikan jawabanmu dengan teman sebangkumu. Periksalah apakah kalian memiliki jawaban yang sama. Majulah ke depan kelas, bagikan hasil diskusimu kepada teman sekelasmu.

Materi Esensi 3.4

Dilatasi

Dilatasi terhadap titik pusat merupakan perkalian dari koordinat tiap-tiap titik pada suatu bangun datar dengan faktor skala sebesar k . Faktor skala menentukan apakah suatu dilatasi merupakan pembesaran atau pengecilan. Secara umum dilatasi dari suatu koordinat (x, y) dengan faktor skala k akan menghasilkan koordinat (kx, ky) atau dapat ditulis $(x, y) \rightarrow (kx, ky)$. Ketika $k > 1$ maka dilatasi tersebut termasuk ke dalam pembesaran, tetapi jika $0 < k < 1$ maka dilatasi tersebut termasuk ke dalam pengecilan. Untuk memperbesar atau memperkecil bangun, letak pusat dilatasi dapat di dalam, di luar, atau pada tepi bangun yang akan didilatasikan.

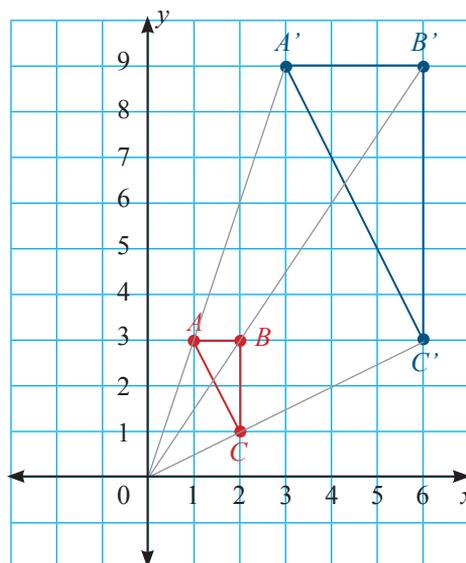


Contoh 1**Dilatasi Pada Segitiga dengan Pusat Dilatasi di Titik Asal**

Diketahui segitiga ABC dengan titik sudut masing-masing $A(1, 3)$, $B(2, 3)$, dan $C(2, 1)$. Gambar segitiga ABC dan bayangannya setelah didilatasi dengan faktor skala 3 dengan pusat dilatasi titik awal.

Penyelesaian:

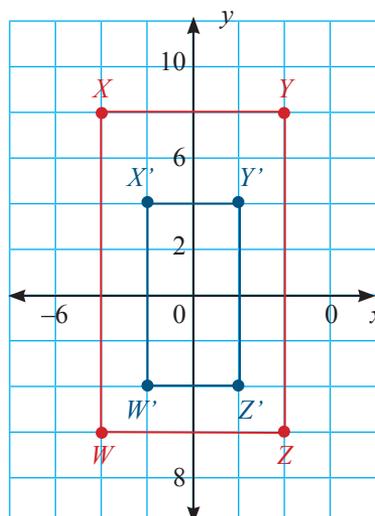
Titik sudut ABC	$(3x, 3y)$	Titik sudut $A'B'C'$
$A(1, 3)$	$(3 \times 1, 3 \times 3)$	$A'(3, 9)$
$B(2, 3)$	$(3 \times 2, 3 \times 3)$	$B'(6, 9)$
$C(2, 1)$	$(3 \times 2, 3 \times 1)$	$C'(6, 3)$

**Contoh 2****Dilatasi Pada Segi Empat dengan Pusat Dilatasi di Titik Asal**

Diketahui segi empat $WXYZ$ dengan titik sudut masing-masing $W(-4, -6)$, $X(-4, 8)$, $Y(4, 8)$ dan $Z(4, -6)$. Gambar segi empat $WXYZ$ dan bayangannya setelah didilatasi dengan faktor skala 0,5 dengan pusat dilatasi titik awal.

Penyelesaian:

Titik sudut $WXYZ$	$(0,5x, 0,5y)$	Titik sudut $W'X'Y'Z'$
$W(-4, -6)$	$(0,5 \times (-4), 0,5 \times (-6))$	$W'(-2, -3)$
$X(-4, 8)$	$(0,5 \times (-4), 0,5 \times 8)$	$X'(-2, 4)$
$Y(4, 8)$	$(0,5 \times 4, 0,5 \times 8)$	$Y'(2, 4)$
$Z(4, -6)$	$(0,5 \times 4, 0,5 \times (-6))$	$Z'(2, -3)$



Contoh 3**Dilatasi Pada Segi Empat dengan Pusat Dilatasi di Titik P**

Persegi panjang $KLMN$ berkoordinat di $K(2, 0)$, $L(3, 0)$, $M(3, 2)$ dan $N(2, 2)$. Tentukan koordinat $K'L'M'N'$ yang merupakan bayangan dari persegi panjang $KLMN$ setelah didilatasi dengan pusat dilatasi di titik $P(1, 4)$ dan faktor skala 2.

Penyelesaian

Langkah 1

Tentukan titik P dan gambar persegi panjang $KLMN$ pada bidang koordinat.

Langkah 2

Buat garis dari titik P sehingga $PK' = 2PK$

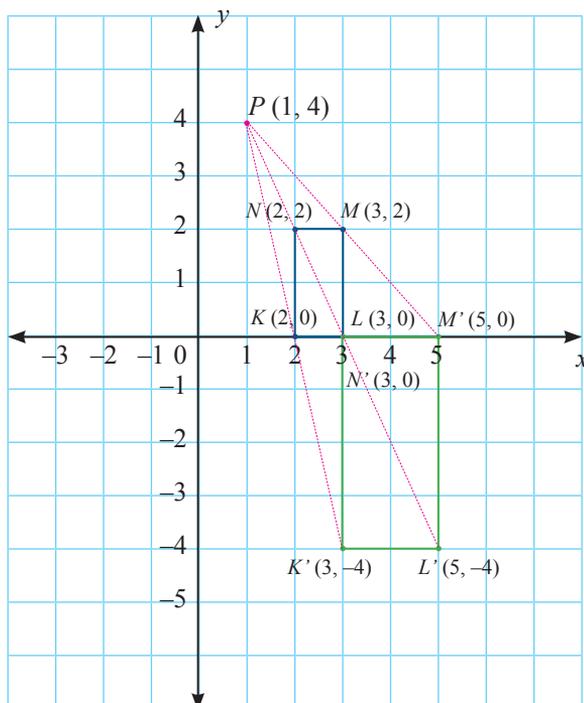
$PL' = 2PL$, $PM' = 2PM$, dan $PN' = 2PN$.

Sehingga diperoleh titik-titik koordinat bayangan K, L, M , dan N adalah sebagai berikut.

$K'(3, -4)$, $L(5, -4)$, $M(5, 0)$, dan $N'(3, 0)$.

Langkah 3

Hubungkan titik-titik K', L', M' , dan N' sehingga terbentuk persegi panjang $K'L'M'N'$.





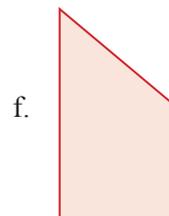
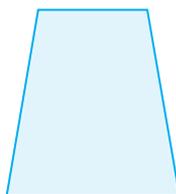
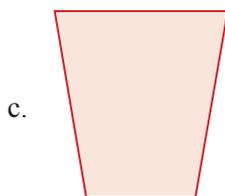
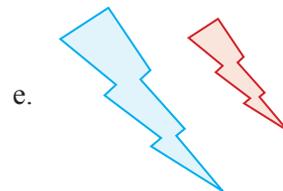
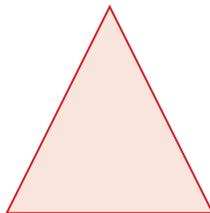
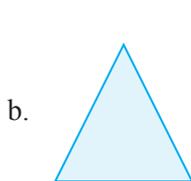
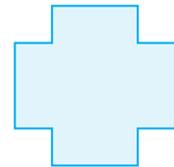
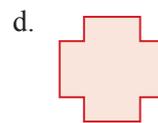
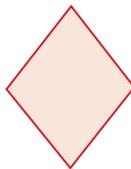
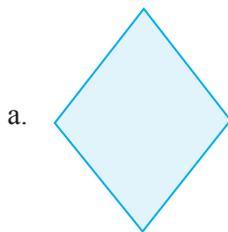
**Ayo Kita
Tinjau Ulang**

1. Bagaimana bentuk bayangan suatu bangun jika dilatasi dengan faktor skala yang bernilai negatif? Apakah arahnya berbeda jika dibandingkan dengan bayangan hasil dilatasi oleh faktor skala positif? Jelaskan.
2. $\triangle DEF$ berkoordinat di $D (5, 8)$, $E (-3, 4)$, dan $F (-1, -6)$. Tentukan bayangan $\triangle DEF$ yang berpusat di titik asal dan faktor skala 3. Gambarlah $\triangle DEF$ sebelum dan sesudah dilatasi.

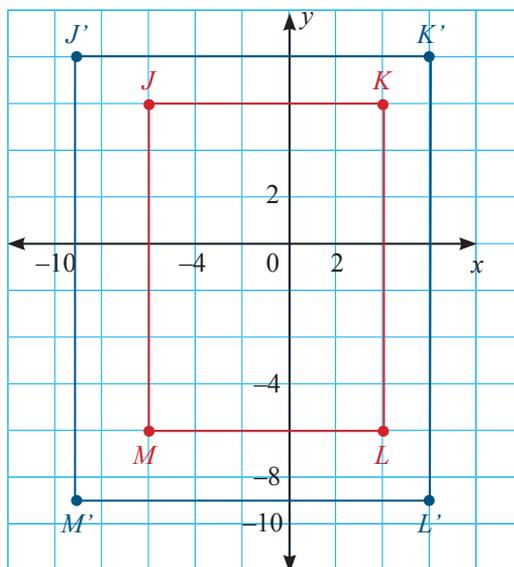
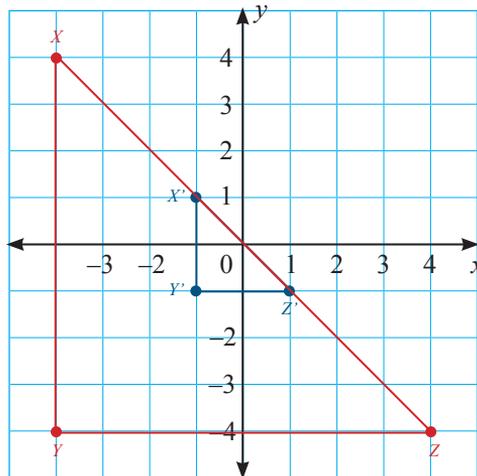
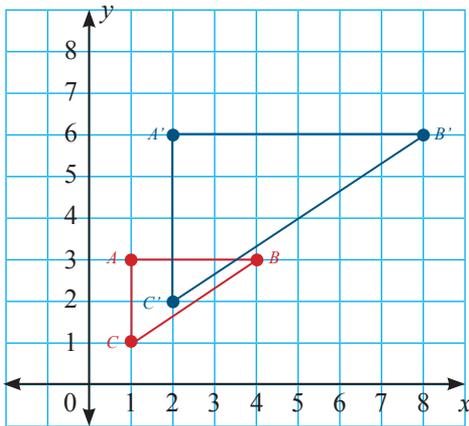
Latihan 3.4

Dilatasi

1. Tunjukkan apakah gambar yang berwarna biru merupakan hasil dilatasi dari gambar yang berwarna merah. Berikan penjelasanmu.



2. Gambar yang berwarna biru merupakan hasil dilatasi dari gambar berwarna merah. Tentukan faktor skala dan jenis dilatasinya.



3. Titik sudut dari masing-masing bidang datar diberikan sebagai berikut. Gambar bidang datar yang dimaksud dan bayangannya setelah dilatasi dengan faktor skala yang diberikan masing-masing. Sebutkan jenis dilatasinya.
- $A(1, 1)$, $B(1, 4)$, dan $C(3, 1)$ dengan faktor skala 4
 - $G(-2, -2)$, $H(-2, 6)$, dan $J(2, 6)$ dengan faktor skala 0,25
 - $Q(-3, 0)$, $R(-3, 6)$, $S(4, 6)$, dan $T(4, 0)$ dengan faktor skala $\frac{1}{3}$

4. Garis TU berkoordinat di $T(4, 2)$ dan $U(0, 5)$. Setelah dilatasi, bayangan yang terbentuk memiliki koordinat di $T'(6, 3)$ dan $U'(12, 11)$. Tentukan faktor skala yang digunakan.
5. Segitiga KLM berkoordinat di $K(12, 4)$, $L(4, 8)$, dan $M(8, -8)$. Setelah dua kali dilatasi berturut-turut yang berpusat di titik pusat dengan faktor skala yang sama, bayangan akhirnya memiliki koordinat $K''(3, 1)$, $L''(1, 2)$, dan $M''(2, -2)$. Tentukan faktor skala k yang digunakan untuk dilatasi ΔKLM menjadi $\Delta K''L''M''$.
6. Gambar sebarang persegi pada bidang koordinat (kamu bebas menentukan panjang sisi dari persegi tersebut). Pilih faktor skala 2, 3, 4, dan 5 kemudian dilatasi persegi yang telah gambar dengan masing-masing faktor skala tersebut. Gambar bayangan hasil dilatasi dengan masing-masing faktor skala. Hitung luas tiap-tiap persegi, baik persegi awal, maupun persegi hasil dilatasi dengan masing-masing faktor skala.
 - a. Berapa kali lebih besar luas persegi hasil dilatasi dengan menggunakan masing-masing faktor skala jika dibandingkan dengan luas persegi awal?
 - b. Bagaimana rumus untuk menentukan luas persegi hasil dilatasi jika diketahui panjang sisi dari persegi awal adalah r dan faktor skala k ? (Dapatkan rumus tersebut tanpa harus menggambar bayangan hasil dilatasi, gunakan perbandingan pada jawaban a)
 - c. Jika diberikan panjang sisi persegi awal 4 satuan, dan faktor skala 7. Berapa kali lebih besar luas persegi hasil dilatasi jika dibandingkan dengan luas persegi awal?
7. Gunakan lampu senter dan tanganmu untuk membuat bayangan kelinci pada dinding.



- a. Menurutmu mana yang lebih besar, apakah tanganmu yang asli atau bayangan tanganmu yang membentuk gambar kelinci?

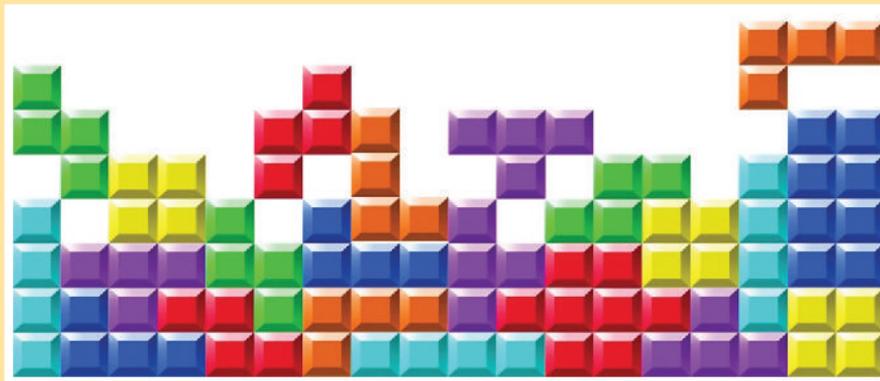
- b. Jika dihubungkan dengan dilatasi, merepresentasikan apakah lampu senter yang digunakan pada percobaan tersebut?
 - c. Berdasarkan hasil perhitungan diketahui bahwa panjang jari tangan 7 cm, sedangkan panjang bayangannya di dinding 14 cm. Berapakah faktor skalanya?
 - d. Jika tanganmu digerakkan mendekati lampu senter, menurutmu apa yang akan terjadi pada bayangannya di dinding? Apa hubungannya dengan faktor skala?
8. Diketahui segitiga ABC dengan koordinat titik sudut di $A(6, 12)$, $B(-9, 3)$ dan $C(6, -6)$. Gambar bayangan hasil transformasinya jika diketahui segitiga tersebut:
- a. Didilatasi dengan menggunakan faktor skala $\frac{1}{3}$ dengan pusat titik asal kemudian dirotasi 90° searah jarum jam yang berpusat di titik asal.
 - b. Didilatasi dengan menggunakan faktor skala 2 dengan pusat titik asal kemudian di translasi $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ setelah itu dicerminkan terhadap sumbu- y .



Proyek 3

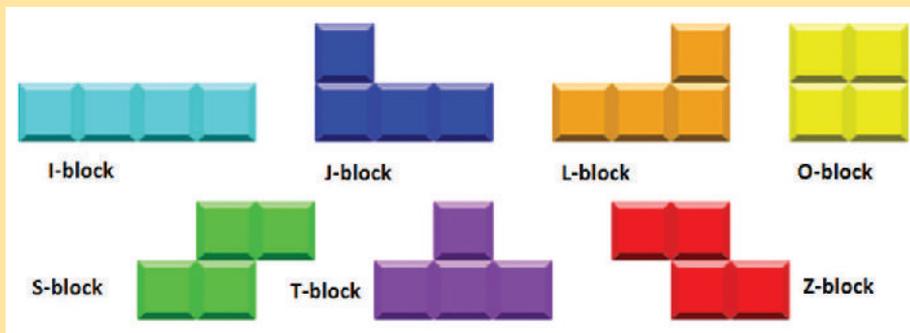
Buatlah kelompok yang terdiri atas 5 anak. Sebagai tugas dari proyek kali ini, kalian akan membuat permainan tetris dengan versimu sendiri. Sebelum bekerja lebih jauh, kalian perlu mengetahui terlebih dahulu mengenai beberapa hal terkait tetris. Tetris (bahasa Rusia: Тетрис) merupakan teka-teki yang didesain dan diprogram oleh Alexey Pajitnov pada bulan Juni 1985, pada saat ia bekerja di Pusat Komputer Dorodnicyn di Akademi Sains Uni Soviet di Moskow. Namanya berasal dari awalan numerik Yunani *tetra* yang bermakna bangun dengan empat bagian.

Permainan ini (atau variasi lainnya) terdapat pada hampir setiap konsol permainan video dan komputer pribadi. Walaupun *Tetris* muncul kebanyakan pada komputer rumahan, permainan ini lebih sukses pada versi Gameboy yang dirilis pada 1989 yang membuatnya sebagai permainan paling populer sepanjang masa. Pada berita *Electronic Gaming Monthly* ke-100, Tetris berada pada urutan pertama pada “Permainan Terbaik Sepanjang Masa”. Pada tahun 2007, Tetris berada di urutan kedua pada “100 Permainan Terbaik Sepanjang Masa” menurut IGN.



Gambar di atas merupakan contoh permainan tetris. Pada permainan ini berbagai macam tetromino yang terdiri dari empat balok akan jatuh. Tujuan dari permainan ini adalah bagaimana cara memanipulasi tetromino yang jatuh, dengan mengerakannya ke samping atau memutarnya, sehingga akan terbentuk garis horizontal tanpa celah, ketika sudah terbentuk, tetromino tersebut akan menghilang, sehingga tetromino di atasnya akan terjatuh. Ketika permainan berlanjut, tetromino tersebut akan jatuh lebih cepat. Permainan akan berakhir apabila tetromino berikutnya terhalang sehingga tidak bisa masuk.

Tetromino yang terdapat pada tetris terdiri atas 7 jenis, yaitu I-block, J-block, L-block, O-block, S-block, T-block, dan Z-block. Coba perhatikan gambar tetromino yang biasanya terdapat pada permainan tetris di bawah ini.



Setelah kalian mengetahui permainan dan cara kerja tetris, kini kalian akan membuat permainan tetris dari 7 jenis tetromino yang ada dengan menggunakan prinsip transformasi yang telah kalian pelajari pada bab ini.

Bahan

- Kertas karton putih sebagai papan permainan tetris berukuran 2 meter \times 1 meter.

- Kertas karton berwarna biru muda sebagai pembentuk I-block
- Kertas karton berwarna biru tua sebagai pembentuk J-block
- Kertas karton berwarna orange sebagai pembentuk L-block
- Kertas karton berwarna kuning sebagai pembentuk O-block
- Kertas karton berwarna hijau muda sebagai pembentuk S-block
- Kertas karton berwarna ungu muda sebagai pembentuk T-block
- Kertas karton berwarna merah sebagai pembentuk Z-block
- Penggaris
- Spidol Hitam
- Kertas untuk mencatat jenis transformasi pada masing-masing tetromino

Langkah-langkah pembuatan permainan

1. Buatlah papan permainan tetris dengan menggunakan kertas karton berwarna putih, spidol hitam, dan penggaris seperti gambar di bawah ini

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
																				A
																				B
																				C
																				D
																				E
																				F
																				G
																				H
																				I
																				J
																				K
																				L
																				M
																				N
																				O

2. Papan permainan tetris berukuran 15 (pada sumbu vertikal) dan 20 (pada sumbu horizontal). Tiap-tiap 1 kotak dalam papan permainan tetris memiliki

ukuran 5×5 cm. Selanjutnya berikan label huruf pada sumbu vertikal dan abel angka pada sumbu horizontal (perhatikan contoh papan permainan tetris di atas). Tujuan dari pemberian label adalah untuk mengetahui posisi/koordinat dari masing-masing tetromino yang berada di dalam permainan.

3. Setelah kamu selesai membuat papan permainan tetris, selanjutnya kamu membuat tetromino sesuai dengan warna yang telah ditentukan. Buatlah I-block dengan menggunakan kertas karton berwarna biru muda, J-block dengan menggunakan kertas karton berwarna biru tua, L-block dengan menggunakan kertas karton berwarna orange, O-block dengan menggunakan kertas karton berwarna kuning, S-block dengan menggunakan kertas karton berwarna hijau muda, T-block dengan menggunakan kertas karton berwarna ungu muda, dan Z-block dengan menggunakan kertas karton berwarna merah. Perhatikan bahwa ukuran dari tetromino haruslah sesuai dengan papan permainan tetris. Dengan demikian ukuran tiap-tiap kotak tetromino adalah 5×5 cm. Untuk tiap-tiap tetromino kalian diwajibkan membuat masing-masing 8 buah.
4. Setelah kamu selesai membuat tetromino, berikan label/nama pada masing-masing tetromino dengan aturan berikut:
 - Untuk tetromino berbentuk I-block berikan label I-1 sampai dengan I-8
 - Untuk tetromino berbentuk J-block berikan label J-1 sampai dengan J-8
 - Untuk tetromino berbentuk L-block berikan label L-1 sampai dengan L-8
 - Untuk tetromino berbentuk O-block berikan label O-1 sampai dengan O-8
 - Untuk tetromino berbentuk S-block berikan label S-1 sampai dengan S-8
 - Untuk tetromino berbentuk T-block berikan label T-1 sampai dengan T-8
 - Untuk tetromino berbentuk Z-block berikan label Z-1 sampai dengan Z-8
5. Setelah masing-masing tetromino memiliki label, langkah berikutnya adalah kamu mencoba masing-masing tetromino tersebut benar-benar memiliki ukuran yang bersesuaian dengan papan permainan tetris. Cobalah untuk memutar dan menggeser masing-masing tetromino tersebut pada papan permainan tetris. Jika semua telah sesuai, maka permainan tetris siap untuk dimulai.



Langkah-langkah permainan

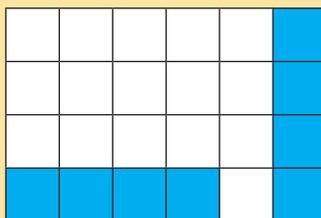
1. Pada permainan tetris ini, kamu hanya menggunakan 2 prinsip transformasi, yaitu rotasi dan translasi.
2. Pada bagian awal papan tetris dalam kondisi kosong (tidak ada tetromino sama sekali)
3. Selanjutnya perhatikan gambar di bawah ini

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20		
I	I	I	I	O	O		S	S	T	T	T		J						L	A	
				O	O	S	S	T	T	T	T	J	J	J	J	L	L	L		B	
																					C
																					D

5. Pada permainan tetris, tetromino selalu muncul pada bagian paling atas dari papan permainan. Biasanya tetromino muncul secara acak. Namun pada permainan tetris kali ini, ada beberapa aturan terkait dengan kemunculan tetromino pada bagian atas papan permainan. Perhatikan gambar di atas yang menunjukkan koordinat atau posisi munculnya tetromino pada bagian atas papan permainan.
 - I-block selalu muncul pada koordinat A1, A2, A3, dan A4
 - O-block selalu muncul pada koordinat A5, A6, B5, dan B6
 - S-block selalu muncul pada koordinat A8, A9, B7, dan B8
 - T-block selalu muncul pada koordinat A10, B9, B10, dan B11
 - Z-block selalu muncul pada koordinat A11, A12, B12, dan B13
 - J-block selalu muncul pada koordinat A14, B14, B15, dan B16
 - L-block selalu muncul pada koordinat A19, B17, B18 dan B19
4. Urutan kemunculan dari tetromino yaitu I- block muncul pertama, kemudian diikuti oleh O-block pada urutan kedua, S-block pada urutan ketiga, T-block pada urutan keempat, Z-block pada urutan kelima, J-block pada urutan keenam, dan terakhir adalah L-block. Jika telah selesai, maka kembali lagi ke I-block, lalu O-block, dan seterusnya seperti urutan yang dijelaskan di atas. Permainan berhenti jika tetromino yang digunakan telah habis.

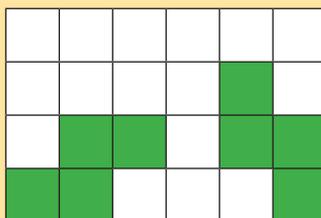
5. Langkah-langkah pada permainan ini yaitu:

- a. I-block muncul terlebih dahulu kemudian pemain menggerakkan I-block hingga I-block menyentuh bagian paling bawah pada papan permainan tetris. Ketika I-block mencapai bagian bawah papan permainan tetris ada 2 kemungkinan posisi I-block, yaitu posisi horizontal dan vertikal. Perhatikan gambar di bawah ini.



Pemain bebas menentukan pada posisi mana sebaiknya L-block diletakkan.

- b. Setelah I-block telah mencapai bagian bawah papan permainan, selanjutnya muncul O-block. Pemain harus menggerakkan O-block ini hingga mencapai bagian bawah papan permainan. Pemain bebas menentukan di posisi mana O-block akan diletakkan, apakah pada bagian paling bawah dari papan permainan ataukah di atas posisi dari I-block.
- c. Selanjutnya ketika O-block telah mencapai bagian bawah papan permainan maka muncul S-block. Pemain harus menggerakkan S-block ini hingga mencapai bagian bawah papan permainan. Pemain bebas menentukan di posisi mana S-block akan diletakkan, apakah pada bagian paling bawah dari papan permainan ataukah di bagian atas dari tetromino yang lainnya. Ketika S-block mencapai bagian bawah papan permainan tetris ada 2 kemungkinan posisi S-block, yaitu posisi horizontal dan vertikal. Perhatikan gambar di bawah ini.

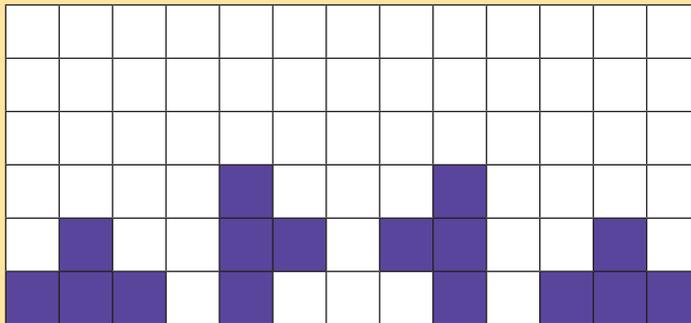


Pemain bebas menentukan pada posisi mana sebaiknya S-block diletakkan.

- d. Ketika S-block telah mencapai bagian bawah papan permainan maka muncul T-block. Pemain harus menggerakkan T-block ini hingga mencapai bagian bawah papan permainan. Pemain bebas menentukan di

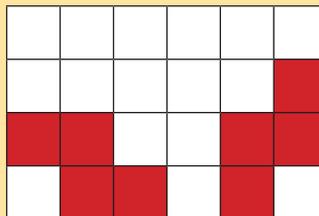


posisi mana T-block akan diletakkan, apakah pada bagian paling bawah dari papan permainan ataukah di bagian atas dari tetromino yang lainnya. Ketika T-block mencapai bagian bawah papan permainan tetris ada 4 kemungkinan posisi T-block, yaitu posisi horizontal ke atas, horizontal ke bawah, vertikal ke arah kanan, dan vertikal ke arah kiri. Perhatikan gambar di bawah ini.



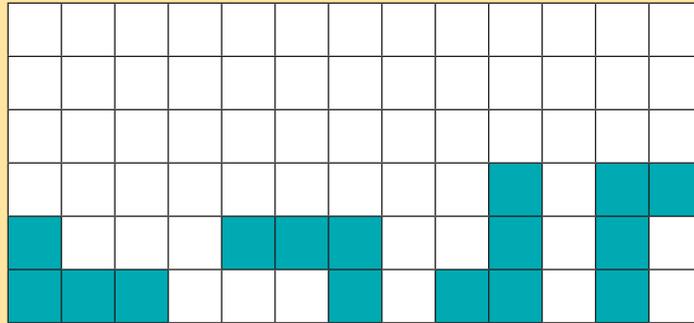
Pemain bebas menentukan pada posisi mana sebaiknya T-block diletakkan.

- e. Setelah T-block telah mencapai bagian bawah papan permainan, selanjutnya muncul Z-block. Pemain harus menggerakkan Z-block ini hingga mencapai bagian bawah papan permainan. Pemain bebas menentukan di posisi mana Z-block akan diletakkan, apakah pada bagian paling bawah dari papan permainan ataukah di bagian atas dari tetromino yang lainnya. Ketika Z-block mencapai bagian bawah papan permainan tetris ada 2 kemungkinan posisi Z-block, yaitu posisi horizontal dan vertikal. Perhatikan gambar di bawah ini.



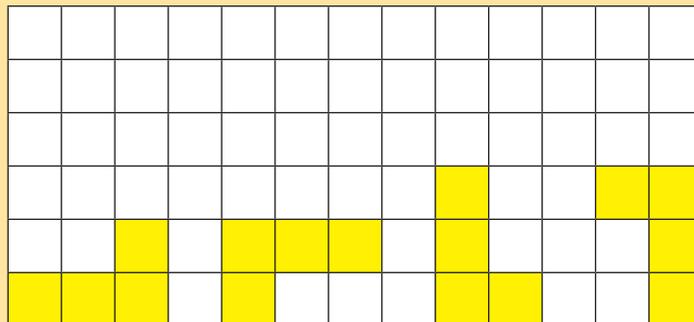
Pemain bebas menentukan pada posisi mana sebaiknya Z-block diletakkan.

- f. Ketika Z-block telah mencapai bagian bawah papan permainan maka muncul J-block. Pemain harus menggerakkan J-block ini hingga mencapai bagian bawah papan permainan. Pemain bebas menentukan di posisi mana J-block akan diletakkan, apakah pada bagian paling bawah dari papan permainan ataukah di bagian atas dari tetromino yang lainnya. Ketika J-block mencapai bagian bawah papan permainan tetris ada 4 kemungkinan posisi T-block. Perhatikan gambar berikut ini.



Pemain bebas menentukan pada posisi mana sebaiknya J-block diletakkan.

- g. Setelah J-block telah mencapai bagian bawah papan permainan, selanjutnya muncul L-block. Pemain harus menggerakkan L-block ini hingga mencapai bagian bawah papan permainan. Pemain bebas menentukan di posisi mana L-block akan diletakkan, apakah pada bagian paling bawah dari papan permainan ataukah di bagian atas dari tetromino yang lainnya. Ketika L-block mencapai bagian bawah papan permainan ada 4 kemungkinan posisi L-block. Perhatikan gambar di bawah ini.



Pemain bebas menentukan pada posisi mana sebaiknya L-block diletakkan.

- h. Setelah L-block mencapai bagian bawah papan permainan, selanjutnya kembali muncul I-block, kemudian diikuti oleh O-block, S-block, T-block, Z-block, J-block, dan terakhir L-block. Jika telah selesai, maka kembali lagi ke I-block, lalu O-block, dan seterusnya seperti urutan yang dijelaskan sebelumnya. Permainan berhenti jika tetromino yang digunakan telah habis.
6. Syarat dari permainan ini yaitu :
- Tidak boleh ada kotak yang kosong di sela-sela tetromino
 - Jika baris bagian bawah dari papan permainan telah penuh, kamu dapat mengisi baris pada bagian yang berada pada posisi lebih atas

- Jika baris bagian bawah dari papan permainan telah penuh, kamu dapat mengisi baris pada bagian yang berada pada posisi lebih atas
- Kamu tidak diperbolehkan mengubah urutan dan posisi awal dari kemunculan tetromino
- Kamu hanya diperbolehkan melakukan rotasi dan translasi pada masing-masing tetromino
- Permainan berhenti jika tetromino telah habis

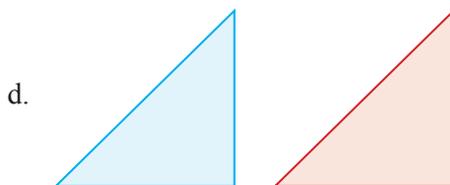
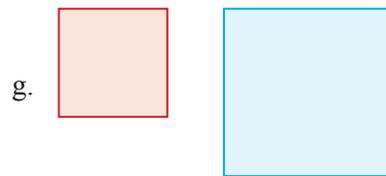
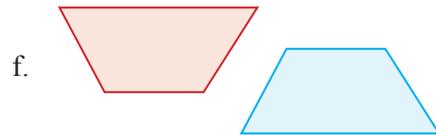
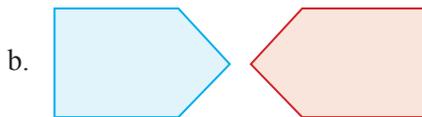
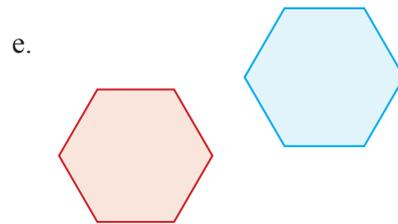
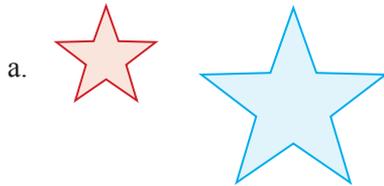
Tugas

Sediakan kertas untuk mencatat, lalu buatlah tabel seperti di bawah ini

No.	Nama/Label Tetromino	Urutan Translasi
1.	I-1	...
2.	O-1	...
3.	S-1	...
4.	⋮	⋮

Jelaskan rangkaian urutan translasi yang dilakukan oleh masing-masing tetromino dari awal kemunculan hingga mencapai posisi akhir. Catatlah pada tabel di atas. Sajikan hasilmu tersebut di depan kelas.

1. Diketahui gambar berwarna biru merupakan bayangan hasil transformasi dari gambar berwarna merah. Tentukan jenis transformasinya.



2. Gambar setiap bangun berikut beserta bayangan hasil refleksi yang diberikan.
- Garis MN dengan $M(3, 5)$ dan $N(-2, -4)$ direfleksikan terhadap sumbu- x .
 - $\triangle RST$ yang berkoordinat di $R(2, -3)$, $S(4, 5)$, dan $T(-4, 6)$ direfleksikan terhadap sumbu- y .



- c. $\triangle KLM$ yang berkoordinat di $K(2, 5)$, $L(3, -4)$, dan $M(-4, -7)$ direfleksikan terhadap titik asal.
- d. Segi empat $ABCD$ dengan $A(-1, -2)$, $B(2, -3)$, $C(6, 3)$, dan $D(-4, 2)$ direfleksikan terhadap garis $y = x$.
- e. Garis FG dengan $F(-4, 6)$ dan $G(7, -9)$ direfleksikan terhadap garis $y = -x$.
3. Diketahui titik $C(u, v)$ dicerminkan terhadap garis $x = 2$ menghasilkan bayangan di titik $C'(5, 7)$. Maka nilai $u + v$ adalah
4. Diketahui segi empat $TUVW$ berkoordinat $T(3, 2)$, $U(1, -4)$, $V(-2, -3)$ dan $W(-2, 4)$. Gambar bayangan segi empat $TUVW$ setelah ditranslasi oleh $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ dan dicerminkan terhadap garis $y = x$.
5. Diketahui titik sudut sebuah segitiga yaitu $I(-2, -1)$, $J(-1, -4)$, dan $K(-4, -1)$. Gambar bangun tersebut dan bayangannya dengan menggunakan translasi berikut ini.
- 3 satuan ke kanan dan 4 satuan ke atas
 - $(x - 2, y + 5)$
 - 5 satuan ke kiri dan 7 satuan ke bawah
 - $\begin{pmatrix} 7 \\ -10 \end{pmatrix}$
6. Diketahui segi empat $ABCD$ dengan koordinat titik sudut di $A(2, 5)$, $B(-3, 4)$, $C(4, 3)$ dan $D(4, -2)$. Gambar bayangan hasil transformasinya jika diketahui segi empat tersebut:
- Ditranslasi 3 satuan ke kanan dan 5 satuan ke bawah kemudian dicerminkan terhadap sumbu- x .
 - Dirotasi 90° berlawanan arah jarum jam yang berpusat di titik asal kemudian ditranslasi $(x - 3, y + 2)$.
 - Ditranslasi $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ kemudian dilatasi dengan faktor skala 2 dan berpusat di titik asal.

7.

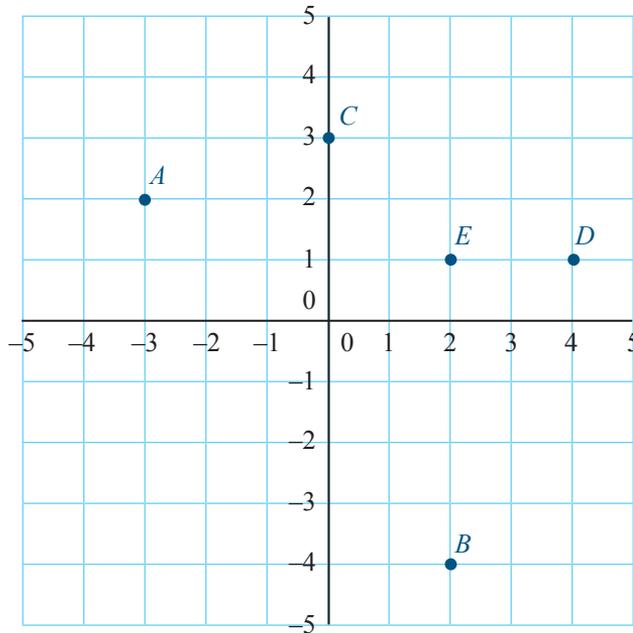
PAPAN TULIS

Andre	Joko	Vivi	Devi	Alex	Dian	DEPAN  BELAKANG
Dani	Supri	Dimas	Santi	Sumi	Steven	
Paul	Panca	Wawan	Winda	Nita	Budi	
Wiwin	Andy	Bernard	Ivanka	Hafid	Putri	
Boy	Fahim	Subchan	Surya	Endah	Udin	
KIRI  KANAN						

Perhatikan denah susunan tempat duduk kelas 9A SMP Ceria di atas pada minggu lalu. Pada minggu lalu Wawan duduk pada posisi nomor 3 dari depan dan lajur ke-3 dari kiri. Pada minggu ini Wawan berpindah pada bangku yang ditempati oleh Putri. Sedangkan Putri berpindah pada bangku yang ditempati oleh Winda, kemudian Winda berpindah pada bangku paling kiri belakang dan Boy menempati bangku yang diisi oleh Wawan pada minggu lalu.

- a. Jika pergeseran (translasi) posisi tempat duduk bernilai positif jika bergeser ke depan dan ke kanan serta bernilai negatif jika bergeser ke belakang dan ke kiri, maka tentukan pasangan bilangan translasi yang menunjukkan perpindahan posisi tempat duduk dari Wawan, Putri, Winda, dan Boy.
- b. Jika Andre melakukan translasi $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$, bangku milik siapa yang ditempati oleh Andre pada minggu ini?
- c. Jika Ivanka, Dani, dan Alex masing-masing ingin bertukar posisi tempat duduk dengan syarat masing-masing siswa tidak diperbolehkan menempati posisi miliknya pada minggu lalu, tentukan 2 kemungkinan translasi yang dilakukan oleh masing-masing siswa tersebut.
- d. Jika Paul dan Fahim ingin bertukar bangku, tuliskan translasi yang dilakukan oleh masing-masing siswa tersebut.

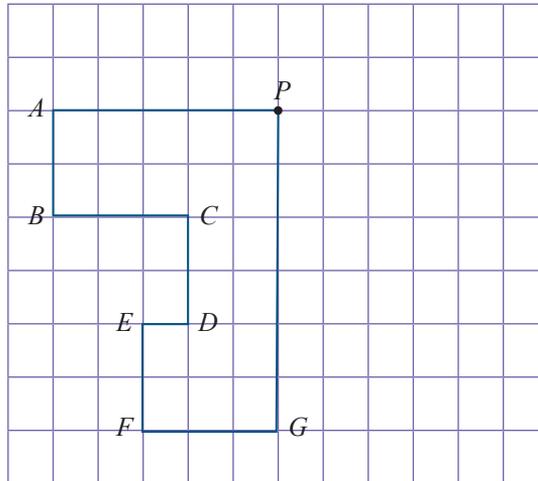
8. Pada bulan Desember 2015 terjadi kecelakaan kapal yang menyebabkan kapal tersebut hampir tenggelam. Berdasarkan hasil pemantauan di sekitar lokasi, diperkirakan ada 3 koordinat lokasi kemungkinan terjadinya kecelakaan tersebut yaitu di titik B , C , dan D . Titik A menunjukkan koordinat kapal tim SAR.



- Tentukan translasi yang harus dilakukan oleh kapal tim SAR jika ingin menuju titik B , C , dan D .
 - Berdasarkan perhitungan oleh tim ahli, kemungkinan terbesar lokasi kecelakaan kapal berada pada radius 4 satuan dari posisi kapal tim SAR saat ini. Menurutmu pada titik mana kemungkinan terbesar terjadinya lokasi kecelakaan?
 - Selain menggunakan kapal tim SAR, diketahui ada kapal lain, yaitu kapal Marina Emas, yang dapat membantu para korban di lokasi kecelakaan kapal (lokasi kecelakaan kapal berdasarkan jawabanmu pada poin b) dengan posisi koordinat di titik E . Menurutmu, kapal mana yang akan terlebih dahulu sampai ke lokasi terjadinya kecelakaan? Jelaskan.
9. Diketahui garis RD berkoordinat di $R(2, 5)$ dan $D(-3, -1)$.
- Gambar bayangan garis RD setelah dilakukan rotasi 90° searah jarum jam dan berpusat di titik asal.

- b. Gambar bayangan garis RD setelah rotasi 180° berlawanan arah jarum jam dan berpusat di titik asal.

10. Perhatikan gambar di bawah ini.

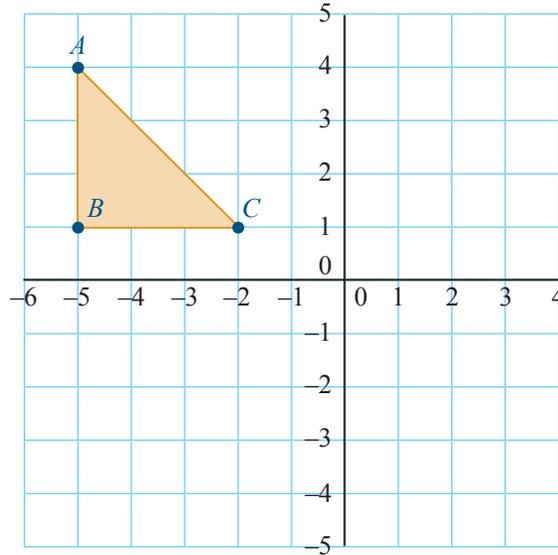


Gambar bayangan hasil rotasi bangun datar tersebut terhadap titik P dengan sudut rotasi yang ditentukan

- Rotasi 90° searah jarum jam
 - Rotasi 180° searah jarum jam
 - Rotasi 90° berlawanan arah jarum jam
 - Rotasi 270° searah jarum jam
 - Rotasi 450° searah jarum jam
11. Diketahui titik sudut dari tiap-tiap bangun datar sebagai berikut. Rotasikan bangun datar berikut dan gambar bayangannya (pusat rotasi di titik asal).
- $A(3, -2)$, $B(-4, -5)$, $C(-4, 3)$ dan $D(3, 4)$ dirotasikan 90° searah jarum jam
 - $I(3, 5)$, $J(-3, 4)$ dan $K(5, -3)$ dirotasikan 180° searah jarum jam
 - $P(3, 4)$, $Q(-3, 2)$, $R(-4, -6)$ dan $S(5, -3)$ dirotasikan 90° berlawanan arah jarum jam
 - $K(4, 7)$, $L(-3, 5)$, $M(-5, -7)$ dan $N(4, -2)$ dirotasikan 270° searah jarum jam



12.



Perhatikan $\triangle ABC$ pada gambar di atas. Gambarlah bayangan hasil transformasinya jika diketahui $\triangle ABC$ tersebut

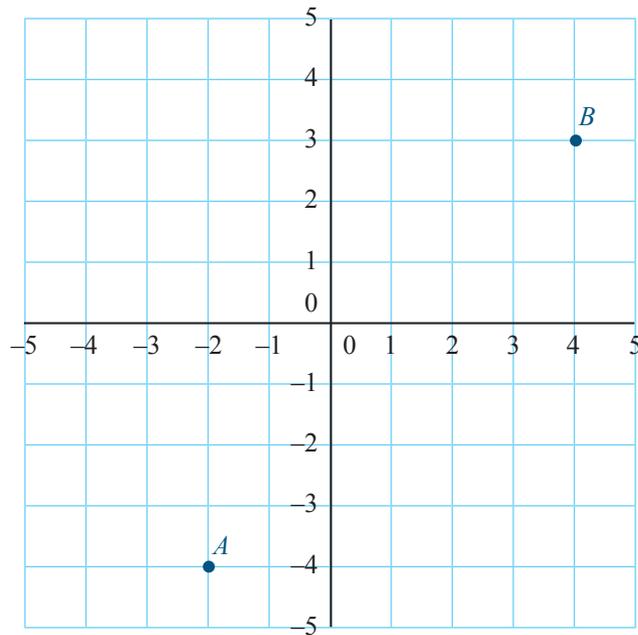
- Dicerminkan terhadap garis $y = 1$ kemudian ditranslasi $\begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix}$
- Dicerminkan terhadap garis $x = 1$ kemudian dirotasi 90° searah jarum jam yang berpusat di titik asal
- Dicerminkan terhadap sumbu- y kemudian dirotasi 180° searah jarum jam yang berpusat di titik asal dan ditranslasi $(x - 2, y + 4)$

13. Diketahui titik sudut dari tiap-tiap bangun datar seperti berikut. Gambar bangun datar berikut beserta bayangan hasil dilatasi dengan faktor skala yang diberikan (pusat dilatasi titik asal). Sebutkan jenis dilatasi pada masing-masing bangun datar

- $A(2, -2), B(-2, 5), C(4, 2), k = 3$
- $I(4, 8), J(-8, 12)$ dan $K(16, -8), k = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$
- $P(1, 1), Q(-2, 3), R(-1, -3)$ dan $S(3, -3), k = 4$
- $K(2, 4), L(-4, 4), M(-8, -6)$ dan $N(4, -6), k = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

14. Seorang bajak laut sedang berburu harta karun. Sang asisten ingin membantu bajak laut untuk mendapatkan harta karun tersebut. Berdasarkan peta yang mereka dapatkan, diketahui bahwa lokasi harta karun berada pada titik B, sedangkan posisi

bajak laut dan asistennya saat ini di titik A . Dengan menggunakan transformasi berikut ini maka bajak laut akan menemukan harta karun yang dicarinya. Akan tetapi tidak semua transformasi di bawah ini dapat digunakan dengan tepat untuk membantu sang bajak laut. Jika kamu menjadi asisten langkah-langkah transformasi apa saja yang akan kamu lakukan? Gunakan masing-masing transformasi berikut ini tepat satu kali.



- a. Rotasi 180° searah jarum jam yang berpusat di titik asal
 - b. Pencerminkan terhadap sumbu- y
 - c. Pencerminkan terhadap sumbu- x
 - d. Rotasi 90° berlawanan arah jarum jam yang berpusat di titik asal
 - e. Translasi 1 langkah ke atas
 - f. Translasi 2 langkah ke kanan dan 2 langkah ke bawah
15. Bangun berwarna biru merupakan bayangan hasil transformasi dari bangun berwarna merah. Sebutkan langkah-langkah transformasi yang dilakukan terhadap bangun berwarna merah sehingga diperoleh bayangan berupa bangun berwarna biru.

